ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 23 OCTOBRE 1916.

PRÉSIDENCE DE M. CAMILLE JORDAN.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. **C. Jordan** donne lecture d'une *Notice nécrologique* sur M. Maupas :

Un nouveau deuil vient de frapper l'Académie; un télégramme l'avise de la mort de M. **Émile-François Maupas**, Conservateur de la Bibliothèque d'Alger, qu'elle s'était associé comme Correspondant depuis 1901 dans la Section d'Anatomie et Zoologie.

Né en 1842, ancien élève de l'École des Chartes, ses fonctions ne semblaient guère le prédisposer aux beaux travaux qui l'ont signalé à notre choix. Bien qu'il les ait exécutés sur des animalcules, il n'en a pas moins obtenu des résultats surprenants qui ont jeté un jour nouveau sur les problèmes fondamentaux de la Biologie.

Au lieu de se fier au hasard des découvertes, il a soumis les petits êtres qu'il étudiait à une expérimentation rigoureuse, cultivant leurs colonies isolées, à l'abri des microbes ambiants, à température fixe, avec une alimentation bien définie.

On savait depuis longtemps que les Infusoires se multiplient par simple division de leur corps; on observait toutefois fréquemment entre eux des conjugaisons dont les conditions de production et les effets étaient inconnus.

M. Maupas a montré que chaque espèce d'Infusoires ne se reproduit par scissiparité qu'un nombre limité de fois. Lorsqu'on approche de ce nombre, on observe des signes évidents de dégénérescence, et dès qu'il est atteint la colonie meurt. Mais si, avant la dégénérescence, on introduit dans la culture des individus d'une autre origine, de nombreuses conjugaisons se

produisent bientôt, alors qu'on n'en observait aucune entre les individus issus d'une même souche.

Les noyaux des deux Infusoires qui s'associent se disloquent au moment de leur conjugaison. Ils sont remplacés par un noyau neuf formé par les nucléoles des deux individus accouplés; et l'être ainsi rajeuni peut parcourir à nouveau tout le cycle des générations successives par division.

Avec les Rotifères, M. Maupas a abordé le problème de la sexualité. Ces petits êtres, d'abord asexués, se reproduisent par des éléments dénommés *œufs d'été* qui se renouvellent sans fécondation préalable tant que la température ne dépasse pas 18°. Mais cette limite franchie ils deviennent femelles, et les nouveaux œufs qu'ils produisent, plus petits que les œufs d'été, fournissent par leur développement des mâles. De l'union des mâles et des femelles résulte un œuf dont l'embryon s'enkyste et devient susceptible de franchir la mauvaise saison.

Chez les Naïs, M. Maupas a réussi à empêcher l'apparition des organes sexuels en les plaçant dans des conditions constantes de température et d'alimentation de manière à favoriser leur reproduction par division.

Ces résultats singuliers, dont l'importance ne saurait être méconnue, assurent à M. Maupas une place durable dans l'Histoire des Sciences.

MINÉRALOGIE. — *Les verres volcaniques du massif du Cantal.* Note de M. A. Lacroix.

Le massif volcanique du Cantal renferme plusieurs gisements de roches essentiellement ou exclusivement constituées par un verre; elles ont peu d'importance géologique, car leur masse n'est pas considérable, mais elles présentent un intérêt minéralogique. J'en ai entrepris l'étude pour établir leur composition et aussi pour rechercher si leur état vitreux tient à une composition chimique spéciale ou n'est pas plutôt la conséquence de conditions particulières de refroidissement.

J'ai été conduit ainsi à constater qu'il existe deux groupes parmi ces laves; les plus nombreuses et les plus variées rentrent dans la catégorie des roches à excès de silice, mais cette silice libre n'est pas exprimée minéralogiquement. Un autre type est constitué par un verre très basique.

Pechsteins rhyolitiques. — Ces roches ont été signalées par les naturalistes

du début du siècle dernier (¹) qui ne les distinguèrent pas tout d'abord des opales résinites abondantes dans le Massif; ce sont elles qui ont été quelquefois désignées sous le nom de *cantalite* (²). Elles forment des filons très minces dans la brèche andésitique du revers occidental du Lioran, dans le haut de la vallée de la Cère, sur les flancs du Plomb du Cantal (chemin des Gardes à Donnadiou et à Verrière, près de la sortie du tunnel du Lioran), ainsi qu'au pied du Puy Griou, près des Chazes (filon ramifié). J'en ai aussi rencontré un petit filonnet (10^cm d'épaisseur) dans la haute vallée de la Jordanne, près du village de Raymond (sur le sentier de Chavaroche).

Ces pechsteins sont verts, tantôt assez homogènes, fragiles, dépourvus de cristallisations macroscopiques; ils se débitent souvent en fragments globuleux grâce à des cassures perlitiques; d'autres sont porphyriques et possèdent un éclat gras remarquablement vif (Verrière). Sauf les cristaux porphyriques de sanidine, cette variété possède la même structure intime que la précédente. Au microscope, on ne voit guère, dans un verre incolore, parcouru par des cassures perlitiques, que quelques cristallites pyroxéniques. A Raymond, certaines portions de la roche prennent un aspect pierreux par suite du développement d'éponges de quartz pœcilitique.

Les analyses ci-contre (M. Pisani et dosage du chlore par M. Raoult) *a* du pechstein porphyrique de Verrières (ou Veyrières) [I.4.1.(3)4],

---

(¹) Voir notamment Lacoste, de Plaisance (*Lettres minéralogiques et géologiques sur les volcans d'Auvergne*, 1805, p. 205 et 262). — Faujas de Saint-Fond (*Mém. Mus. hist. nat. Paris*, t. 2, 1815, p. 371). Des analyses très inexactes de ces roches ont été faites par Bergmann (*in* ALEX. BRONGNIART, *Traité élémentaire de Minéralogie*, t. 1, 1807, p. 342) et par Berthier (*in* BEUDANT, *Traité de Minéralogie*, t. 12, 1832, p. 113).

(²) Le terme de *cantalite* semble avoir été employé pour la première fois par von Leonhard (*Handbuch der Oryktognosie*, 1821, p. 122), pour désigner une variété de silex résinite du Cantal, analysée par A. Laugier [*Ann. Mus. Hist. nat.*, t. 5, an XIII (1804), p. 229]. « Ce silex accompagne le pechstein, dit Laugier, qui ne lui donne que le nom de *pierre silico-ferrugineuse*. »

Le nom de *cantalite* réapparaît avec un autre sens plus compréhensif dans la Table des matières du *Traité de Minéralogie* de Dufrénoy, 1845, avec la mention : « cantalite, synonyme de quartz et de pechstein »; dans sa deuxième édition (1859, t. 4, p. 44), Dufrénoy n'emploie plus ce terme que pour désigner une variété de pechstein; ce même sens est donné dans le *Manuel de Minéralogie* de Des Cloizeaux (1862, t. 1, p. 346) et dans la *Description des roches* de d'Orbigny (Cordier), 1868, p. 236.

b de celui de Raymond [I.(3)4.1'.'4], sont suivies de l'analyse *d* d'un pechstein porphyrique noir de Lusclade au Mont-Dore (*in* von Lasaulx, *N. Jahrb. f. Min.*, 1872, p. 349), qui a la même composition : en général, les rhyolites vitreuses ou sphérolitiques constituant au Mont-Dore des coulées et des ponces de projection sont un peu plus siliceuses.

	SiO^2.	Al^2O^3.	Fe^2O^3.	FeO.	MgO.	CaO.	Na^2O.	K^2O.	TiO^2.	P^2O^5.	Cl.	H^2O.
a.......	69,95	12,10	0,36	0,81	0,80	0,45	4,80	4,15	0,06	tr.	0,72	6,50
b.......	67,50	13,21	0,53	1,12	0,26	0,54	4,73	3,55	0,23	tr.	0,66	7,90
c.......	69,23	13,71	1,03	»	n.d.	0,21	4,07	3,35	n.d.	n.d.	n.d.	8,26

Dans l'étude des verres volcaniques, l'indice de réfraction joint à la densité fournit une donnée intéressante : les valeurs suivantes ont été mesurées sur *a* et *b*; densité 2,31 et 2,33; n(Na) = 1,4972 et 1,4981.

Pechsteins dellénitiques. — Le ravin de Vassivières, au-dessus du Lioran, sur le versant de Murat, renferme en abondance de petits filons de quelques décimètres d'épaisseur d'un pechstein dont je dois la connaissance à M. Pagès-Allary. Ils traversent la brèche andésitique et les coulées intercalées au milieu d'elle. Il s'agit là d'une roche noire, vitreuse, à cassure tantôt brillante et tantôt mate, possédant un délit prismatique, avec disposition des prismes normale aux épontes des filons. Fréquemment, le centre de ceux-ci possède un aspect très différent; il est alors constitué par une roche poreuse d'un gris de souris. L'examen microscopique montre que, malgré ces différences extérieures, la composition minéralogique et la structure de ces roches sont identiques; elles renferment notamment les mêmes petits phénocristaux de plagioclase. Elles ne diffèrent que parce que dans l'une le verre est continu et dans l'autre très bulleux (1). Les phénocristaux sont à rapporter à l'andésine; ils sont accompagnés d'un peu de biotite, avec, çà et là, quelques cristaux d'augite et de hornblende et enfin de très fins microlites feldspathiques filiformes, à extinction longitudinale, associés à de nombreuses et fort petites lamelles de biotite.

L'analyse *a* a été faite sur le bord vitreux (M. Raoult) [I'.4.2.3]; je donne en *b* [I'.4(5).2.3'] comme comparaison celle d'un type assez fréquent au Mont-Dore (sous forme de blocs) et constitué par un verre noir fragile, à cassure irrégulière, riche en phénocristaux de sanidine et d'andésine, accompagnés d'apatite, de sphène et de biotite; ces minéraux sont dissé-

(1) Une variante est formée par des filons dans lesquels le centre est dépourvu de bulles, mais possède un état mat : la fluidalité du verre est des plus nettes.

minés dans un verre brun, à structure fluidale étirée et à cassure perlitique, pauvre en cristallites. Le calcul de la composition virtuelle de la roche du Lioran donne : quartz, 18 pour 100; orthose, 34; albite, 28; anorthite, 8, soit un plagioclase à 22 pour 100 d'anorthite. On voit que l'orthose et le plagioclase existent en quantité presque égale; cette roche a donc la composition chimique d'une monzonite quartzifère; elle peut être considérée comme un type caractéristique de *dellénite*. La roche du Mont-Dore ne renferme que 13 pour 100 de silice libre, 31 d'orthose et 46 de plagioclase à 21 pour 100 d'anorthite : le rapport des deux feldspaths est de 0,67; c'est encore une dellénite, mais à la limite des latites. La densité du verre de Lioran est de 2,51; $n = 1,5148$.

Perlite dacitique. — Cette roche constitue aussi un filon dans la brèche andésitique du Plomb du Cantal, près du buron de Rambertère; sa composition minéralogique a été décrite par Fouqué [1] (I, apatite, titanomagnétite, hornblende, augite, biotite, plagioclases zonés avec Ab^4An^3 comme moyenne; II, verre brunâtre en lames minces avec quelques cristallites ferrugineux et cassures perlitiques). L'analyse *a* (M. Raoult) [I(II).4'.'3.3'] est accompagnée de celle *b* [II.'5.3.4] d'une andésite à augite et hypersthène d'une coulée voisine du Griou. Le calcul de la composition virtuelle de *a* donne : quartz, 15 pour 100; orthose, 20; albite, 24; anorthite, 19, c'est-à-dire plagioclase à 44 pour 100 d'anorthite. Le rapport de l'orthose au plagioclase est de 0,46; la roche est donc une *dacite* typique. Quant à celle que j'ai prise comme comparaison, son plagioclase virtuel est à 40 pour 100 d'anorthite; c'est un type un peu plus calcique et ferro-magnésien, une véritable andésite, avec cependant encore 6 pour 100 de silice libre.

											H^2O	
	SiO^2.	Al^2O^3.	Fe^2O^3.	FeO.	MgO.	CaO.	Na^2O.	K^2O.	TiO^2.	P^2O^5.	Cl.	à 105°.	au rouge.
a...	57,26	15,42	3,42	2,80	2,21	5,50	3,28	3,37	2,40	0,31	0,50	0,61	2,98
b...	53,85	16,21	4,11	4,70	3,35	7,81	3,75	2,22	2,60	0,64	»		1,25

En résumé, les roches qui viennent d'être décrites sont toutes filoniennes; le pechstein rhyolitique représente le terme extrême de différentiation du magma du Cantal; il n'y est connu jusqu'ici que sous cette forme filonienne. Il faut remarquer que les roches qui s'en rapprochent le plus, au point de

(1) *Bull. Soc. franç. Minér.*, t. 17, 1894, p. 519. Mon regretté maître a donné l'analyse du verre et du feldspath, et non celle de la roche en bloc, telle qu'elle est fournie ci-dessus; la localité a été désignée sous le nom de Ramburtet.

vue de la composition, sont les trachytes miocènes des premières éruptions du volcan, mais elles s'en distinguent nettement par l'âge, puisque ce pechstein traverse la brèche andésitique pliocène qui recouvre ces trachytes. Les deux autres types sont comparables au groupe de roches constituant la plus grande partie du Massif du Cantal; c'est à Fouqué qu'est due la notion de leur nature andésitique; l'étude chimique permet aujourd'hui d'aller plus loin et de faire voir leur complexité; elles correspondent les unes à de véritables andésites ou à des dacites (et de nature variée), les autres à des dellénites; je donnerai ultérieurement des précisions à cet égard ([1]).

L'étude des roches du torrent de Vassivières permet de prouver que leur texture vitreuse n'est due qu'aux conditions de leur consolidation, à un refroidissement brusque affectant complètement ou localement (sur les bords) des veinules de petite masse. A cet égard, ces filons m'ont rappelé ceux que j'ai observés à la Réunion, dans le Massif du Piton des Neiges. Les hautes falaises du ravin de Cilaos, entaillées dans un complexe d'agglomérats, de coulées et de sills basaltiques, sont traversées par un réseau de petits filons basaltiques; dès que ceux-ci n'ont que quelques décimètres et surtout lorsqu'ils ont moins d'épaisseur, leurs bords deviennent vitreux et lorsqu'on les suit jusqu'à leur terminaison, on les voit diminuer progressivement d'épaisseur pour se terminer par des prolongements capillaires. La zone vitreuse latérale augmente alors rapidement et finit par constituer entièrement toute la roche.

Il me reste à considérer le verre très basique. Il forme au sud de Loubarcet (13^{km} au sud de Massiac et 3^{km} à l'ouest de la Chapelle Laurent) des accumulations de gros blocs ([2]) qui correspondent probablement à une coulée démantelée.

De nombreuses variétés de texture sont à considérer dans ce verre noir; les unes ont un faciès obsidiennique, à cassure conchoïde; dans d'autres, la cassure est irrégulière par suite de l'existence de petits pores à gaz et l'on passe ainsi à des types nettement bulleux. Aux affleurements, ces roches sont superficiellement hydratées et oxydées, friables; leur couleur jaune

([1]) M. Lagorio a donné (*Tschermak's min. u. petr. Mitteil.*, t. 8, 1887, p. 475) l'analyse partielle d'un pechstein noir, indiqué comme provenant du Cantal, sans plus de précision, qui est plus riche en alumine et en alcalis que les roches dont il est question ici.

([2]) M. Pagès-Allary a bien voulu recueillir pour moi une série nombreuse d'échantillons de cette roche, qui se rencontre aussi en petits fragments dans les produits des projections de Védrines, près Molompize.

brunâtre et les autres propriétés sont celles de la palagonite. Au microscope, le verre apparaît hétérogène, brun à violacé; des cassures, irrégulières plutôt que perlitiques, le parcourent; sa fluidalité est jalonnée par quelques cristallites ferrugineux. Des phénocristaux d'olivine à formes nettes de dimensions variées sont accompagnés de quelques rares microlites d'augite. Aucune différence de structure n'existe entre les divers types observés. Dans le même gisement, quelques échantillons pierreux ont été recueillis; ils sont constitués par un basalte, à très fins microlites d'augite et de labrador, qui a la même composition chimique : j'ai obtenu un type pétrographique identique en chauffant l'obsidienne jusqu'à transformation en une masse bulleuse et en la soumettant alors à un recuit de quelques heures.

L'analyse suivante (M. Raoult): *a*, [III'.6.3.4] donne la composition de cette roche; *b* est celle de l'*essexite* [III.6'.3.4] filonienne que j'ai signalée, il y a quelques années, en dykes dans la brèche andésitique de la Font-aux-Vaches, près du Puy Griou : la densité de *a* est de 2,90; $n = 1,6150$.

	SiO^2.	Al^2O^3.	Fe^2O^3.	FeO.	MgO.	CaO.	Na^2O.	K^2O.	TiO^2.	P^2O^5.	Cl.	H^2O à 105°.	H^2O au rouge.
a...	43,84	13,16	0,91	9,30	11,28	11,98	3,06	1,36	4,20	0,16	0,30	0,21	0,38
b...	46,31	14,90	1,77	8,98	8,15	9,51	4,06	1,62	3,00	0,32	»	1,38	»

La faible perte au feu contraste avec la richesse en eau des pechsteins précédents; il s'agit là d'une obsidienne de basalte essexitique, renfermant 12 pour 100 de néphéline virtuelle : l'essexite de la Font-aux-Vaches appartient au même groupe; elle est seulement un peu plus riche en éléments blancs, tous exprimés; la roche de Loubarcet est l'une des plus basiques, sinon la plus basique des laves du Cantal. La rareté des obsidiennes basaltiques, se présentant autrement que sous forme d'une croûte mince de quelques centimètres à la surface d'une coulée, lui donne un intérêt tout spécial.

En terminant, je ferai remarquer la constance dans toutes ces laves vitreuses, quelle que soit leur composition, d'une quantité notable de *chlore*; elle est facilement explicable puisque de tous les magmas volcaniques en voie d'épanchement se dégagent des chlorures alcalins; cette constatation est à rapprocher des observations de M. Brun qui ont montré [1] l'existence de composés chlorés parmi les gaz extraits des roches volcaniques les plus diverses.

---

[1] *Recherches sur l'exhalaison volcanique*, 1911. Dans cet Ouvrage sont étudiés (p. 36) les gaz extraits d'une « obsidienne du Plomb du Cantal », qui est certainement l'un des pechsteins dont il est question plus haut. Ces gaz consistent en Cl, HCl, H^2S, SO^2, CO^2, CO, H, Az avec un peu de salmiac et des traces d'hydrocarbures.

THÉORIE DES NOMBRES. — *Sur quelques fonctions numériques remarquables.* Note de M. G. HUMBERT.

1. *Définitions.* — Dans deux Notes publiées aux *Comptes rendus*, t. 158, 1914, p. 220 et 293), j'ai étudié certaines fonctions entières, dont les propriétés intéressent l'Arithmétique : elles sont au nombre de *douze*, si l'on joint à celles que j'ai introduites leurs transformées par les changements de q en $-q$ ou de x en $x+\frac{1}{2}\pi$. Pour compléter ce qu'on pourrait appeler *le premier degré*, il me reste à définir *quatre* nouvelles fonctions.

Nous poserons

$$\sigma(x)=4\sum_{m=1}^{\infty} q^{m^2}\frac{q^m}{1-q^{2m}}(-1)^m \sin 2mx,$$

$$s(x)=2\sum_{1}^{\infty} q^{m^2}\frac{1+q^{2m}}{1-q^{2m}}(-1)^m \sin 2mx,$$

fonctions évidemment entières.

σ_1 et s_1 seront respectivement $\sigma\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ et $s\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. Entre σ et s, on a le lien établi par l'équation

$$(1)\qquad s(x)=\sigma\left(x+\frac{\pi\tau}{2}\right)+i[1-\Theta(x)] \qquad (q=e^{i\pi\tau}),$$

avec les notations de mes Notes antérieures; de plus, σ_1 et s_1 se rattachent aux fonctions définies dans ces Notes par

$$\psi H_1+\sigma_1\Theta=\Theta', \qquad \chi\Theta_1+s_1\Theta=\Theta'.$$

Indiquons également les relations

$$\sigma(x+\pi\tau)=\sigma(x)-2q^{-\frac{1}{4}}e^{-ix}H(x)-2i,$$
$$s(x+\pi\tau)=s(x)+i[1-q^{-1}e^{-2ix}]\Theta(x)-2i.$$

2. *Formules fondamentales pour s.* — La liaison de $s(x)$ avec les formes quadratiques résulte surtout des deux développements suivants :

$$(2)\qquad \frac{s'(x)-\sigma'(0)}{\Theta(x)}=-4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^n \sum_{4n}(-1)^{\frac{m}{4}}\cos\frac{m_2-m_1}{2}x,$$

$$(3)\qquad \frac{s''(x)}{\Theta(x)}=\ \ 4\sum_{1}^{\infty}(-1)^n q^n \sum_{4n}(-1)^{\frac{m}{4}}(m_1+m_2-m)\sin\frac{m_2-m_1}{2}x.$$

Dans ces formules, les sommes $\sum\limits_{4n}$ portent sur les *classes* de formes quadratiques binaires et positives, de l'ordre propre, et de discriminant $4n$; on désigne respectivement par m_1, m_2, m (avec $m_1 \leqq m_2$), les deux minima impairs et le minimum pair d'une de ces classes.

De (2) on déduit, en chassant $\Theta(x)$ et égalant les coefficients de q^{N} dans les deux membres, N représentant un *entier positif donné* arbitrairement,

$$(4)\qquad \sum_{4N-4k^2} (-1)^{\frac{m}{4}} \cos\left(\frac{m_2 - m_1}{2} + 2k\right)x = -\sum{}' 2d' \cos 2d'x + (-1)^{N} \sum{}'' 2\delta(-1)^{\delta}.$$

La première somme s'étend aux classes positives (ordre propre) des discriminants $4N - 4k^2$, où k prend les valeurs $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, 4N - 4k^2$ restant positif. Au second membre, Σ' porte sur les décompositions en facteurs $N = d'd'_1$, où d', d'_1 sont entiers positifs, *de même parité*, et $d' \leqq d'_1$; la somme Σ'' porte sur les décompositions $N = \delta\delta_1$, où δ et δ_1, entiers positifs, sont *de parités contraires* et $\delta < \delta_1$. Ajoutons que, dans Σ', si $d' = d'_1$, le terme correspondant doit être divisé par 2.

On déduit de (4), en désignant par $\varphi(u)$ une *fonction paire* quelconque, finie pour toute valeur entière de u, et *telle que* $\varphi(0) = 0$, la relation plus simple

$$(5)\qquad \sum_{4N-4k^2} (-1)^{\frac{m}{4}} \varphi\left(\frac{m_2 - m_1}{2} + 2k\right) = -\sum{}' 2d' \varphi(2d'),$$

qui, *si l'on y joint* celle obtenue en faisant $x = 0$ dans (4), est équivalente à (4).

De même (3) donne la formule suivante, où f désigne une *fonction impaire quelconque*,

$$(6)\qquad \sum_{4N-4k^2} (-1)^{\frac{m}{4}} (m_1 + m_2 - m) f\left(\frac{m_2 - m_1}{2} + 2k\right) = -\sum{}' 4d'^2 f(2d'),$$

Σ et Σ' étant définies en tout comme ci-dessus.

3. *Conséquences arithmétiques.* — On en obtiendra de nombreuses, en variant la forme des fonctions φ et f dans (5) et (6).

D'abord, en faisant $x = 0$ dans (4), on trouve la relation

$$(7)\qquad \sum_{4N-4k^2} (-1)^{\frac{m}{4}} = -\sum{}' 2d' + (-1)^{N} \sum{}'' 2\delta(-1)^{\delta},$$

qui est de même nature que les formules classiques de Kronecker, sur les nombres de classes, mais en diffère en ce qu'une classe est comptée positivement ou négativement selon que son minimum pair, m, est ou non multiple de 8.

Il convient d'observer que, dans les formules précédentes et dans les suivantes, les sommes Σ' sont nulles, par leur définition même, quand $N \equiv 2 \bmod 4$; de même les sommes Σ'', quand N est impair.

Si nous remplaçons, dans (5), $\varphi(x)$ par x^2, nous trouverons, après quelques transformations faciles et en utilisant (7),

$$\sum_{4N-4k^2} (-1)^{\frac{m}{4}} \{ m^2 - 2m(m_1+m_2) + 2(m_2-m_1)^2 \} = 32 \sum{}' d'^2(d'_1 - d') - 32(-1)^N \sum{}'' (-1)^\delta \delta^2 \delta_1.$$

Si, dans (3), nous faisons $f(x) = x$, nous aurons de suite

$$\sum_{4N-4k^2} (-1)^{\frac{m}{4}} \{ m_2^2 - m_1^2 - m(m_2 - m_1) \} = -16 \sum{}' d'^3,$$

formule analogue à la précédente.

Dans cette dernière, en passant des classes (ordre propre) de discriminants $4N - 4k^2$ à celles de discriminants $N - k^2$, où $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, et $N - k^2 > 0$, on obtient

$$(8) \qquad \sum_{N-k^2} 2m^2 - m(m_1+m_2) - (m_2-m_1)^2 = 4 \sum{}' d'^3.$$

J'ai déjà indiqué cette formule (*Comptes rendus*, t. 150, 1910, p. 436); ici elle apparaît comme cas particulier de la relation bien plus générale (6).

4. L'équation (2) peut prendre, par l'introduction des classes de discriminant n (au lieu de $4n$), la forme suivante, où ne figure plus aucune puissance de (-1),

$$\Theta_1(x) \sum_{n=1}^{\infty} q^n \sum_n [(m_2 - m)\sin(m + m_2 - m_1)x + (m_1 - m)\sin(m + m_1 - m_2)x] = -2 \sum_{N=1}^{\infty} q^N \sum{}' d'^2 \sin 2dx;$$

elle donnerait lieu à une relation analogue à (6). Si nous y faisons

$x=\frac{1}{4}\pi$, et si nous égalons les coefficients de q^N dans les deux membres, nous obtenons une identité lorsque N est pair; pour $N=2M+1$, en examinant successivement les cas de M pair et de M impair, nous trouvons deux formules, qu'on peut résumer en celle-ci :

$$\sum_{2M+1-4k^2} \nu(-1)^{\frac{\nu-1}{2}} = \left(\frac{-2}{2M+1}\right) \sum' d'^2(-1)^{\frac{d'-1}{2}},$$

ν désigne $\frac{1}{2}(m_2-m_1)$ si M est impair, et $\frac{1}{2}(m_2+m_1)-m$ si M est pair; la somme Σ' porte sur les décompositions $2M+1=d'd'_1$, avec $d'\leqq d'_1$, et, si $d'=d'_1$, on divisera par 2 le terme correspondant de Σ'. Enfin $\left(\frac{-2}{2M+1}\right)$ est le symbole ordinaire de Jacobi, égal à $(-1)^{\frac{M}{2}}$ ou à $(-1)^{\frac{M-1}{2}}$, selon que M est pair ou impair.

Nous avons déjà trouvé cette formule, mais seulement dans le cas de M impair, et isolément (*Comptes rendus*, t. 150, 1910, p. 434).

Dans toutes ces relations, si l'on rencontre une classe telle que $(a, 0, a)$, on divisera par 2 l'ensemble des termes qui en proviennent.

On aurait, avec $\sigma(x)$, deux formules fondamentales, analogues à (2) et (3), que, pour abréger, nous ne transcrirons pas ici, et qui donneraient également des conséquences arithmétiques nouvelles; nous préférons indiquer comment $\sigma(x)$ se rattache à une théorie classique.

5. *Liaison avec les recherches de M. Appell.* — On sait que M. Appell, pour la décomposition en éléments simples des fonctions elliptiques de troisième espèce, a eu l'idée féconde d'introduire, non pas seulement une fonction d'*une* variable, telle que l'élément simple, $Z(z-a)$, d'Hermite, mais une véritable fonction de *deux* variables; nous n'aurons à considérer ici que sa fonction *d'ordre un*, $\chi_1(a, z)$, et, pour rester d'accord avec nos notations, nous ferons, dans les formules de M. Appell (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. 1, 1884), $2K=\pi$; $2iK'=\pi\tau$. Partons alors de la relation suivante, due à l'éminent géomètre [1] :

$$\text{(9)} \qquad \frac{H_1(a)}{H_1(z)} e^{i(a-z)}\chi_1(a, z) = \frac{H'}{H}\left(z-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{H'}{H}(z-a) + \Psi(a),$$

---

[1] Voir aussi HALPHEN, *Fonctions elliptiques*, t. 1, p. 481, où la relation (9) est présentée sous une forme équivalente.

la fonction *entière* $\Psi(a)$ ayant pour expression (*Ibid.*)

$$\Psi(a) = i - 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n}} \sin 2n\left(a - \frac{\pi\tau}{2}\right).$$

On en déduit

$$\Psi\left(a + \frac{\pi\tau}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = i - s(a),$$

et, par la formule (1) ci-dessus,

$$(10) \qquad \Psi\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -\sigma(a) + q^{-\frac{1}{4}} e^{ia} \mathrm{H}(a),$$

d'où la liaison entre $\sigma(a)$ et la fonction entière rencontrée par M. Appell.

Cela posé, remplaçons, dans (9), a et z par $a + \frac{1}{2}\pi$, $z + \frac{1}{2}\pi$ et tenons compte de (10); nous trouvons

$$(11) \quad \frac{\mathrm{H}(a)}{\mathrm{H}(z)}\left[e^{i(a-z)}\chi_1\left(a+\frac{\pi}{2}, z+\frac{\pi}{2}\right) - \mathrm{H}(z) q^{-\frac{1}{4}} e^{ia}\right] = \frac{\mathrm{H}'}{\mathrm{H}}(z) - \frac{\mathrm{H}'}{\mathrm{H}}(z-a) - \sigma(a).$$

Désignons par $\xi(a, z)$ la fonction entre crochets au premier membre :

$$(12) \qquad \frac{\mathrm{H}(a)}{\mathrm{H}(z)}\xi(a, z) = \frac{\mathrm{H}'}{\mathrm{H}}(z) - \frac{\mathrm{H}'}{\mathrm{H}}(z-a) - \sigma(a);$$

cette fonction possède des propriétés analogues à celles de χ_1; en particulier, elle peut remplacer χ_1 comme élément simple, car elle devient infinie, et de la même manière que χ_1, pour $z = a$; elle a, sur χ_1, en vertu même de (12), l'avantage d'être *impaire* par rapport à l'ensemble a, z, c'est-à-dire que $\xi(-a, -z) = -\xi(a, z)$.

Son développement est

$$\xi(a, z) = 2i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{i(a-z)}}{e^{2i(a-z)} - q^{2n}} q^{n^2+n} e^{2niz},$$

et l'on a les formules

$$(13) \qquad \begin{aligned} \xi(a, z+\pi\tau) &= -q^{-1} e^{-2iz} \xi(a, z); \\ \xi(a+\pi\tau, z) &= -q \quad e^{2ia}\, \xi(a, z) - 2q^{\frac{3}{4}} e^{ia} \mathrm{H}(a). \end{aligned}$$

6. On peut aussi rattacher directement à ξ, donc à l'élément simple de M. Appell, les fonctions numériques entières (ψ_1, ψ, ζ, ...) de nos deux Notes de 1914 [1]; on a, par exemple,

$$\theta\frac{\psi_1(a)}{\Theta_1(a)} = \frac{1}{i} q^{\frac{1}{4}} \xi\left(a + \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi\tau}{2}\right),$$

---

[1] *Comptes rendus*, t. 158, 1914, p. 220 et 293.

où $\theta = \Theta(0)$, et une relation analogue a lieu pour $\psi(a)$. Dès lors, la méthode de décomposition de M. Appell conduit de suite à la formule

$$\eta_1^2 \frac{H}{\Theta\Theta_1} = \frac{\psi}{\Theta} + \frac{\psi_1}{\Theta_1},$$

obtenue autrement dans ma première Note [1], et qui m'a donné des conséquences arithmétiques.

L'élément ξ mène à d'autres fonctions numériques intéressantes. Observons en effet que $\xi(a, z)\,H(a - z)$ est une fonction entière, $V(a, z)$, de a et de z; on voit, par (13), que, *considérée comme fonction de* z, c'est un thêta d'ordre *deux*, et l'on en déduit l'expression

$$V(a, z) = \varphi_1(a)\,\Theta_1(2z - a, q^2) + \varphi_2(a)\,H_1(2z - a, q^2), \tag{14}$$

$\varphi_1(a)$ et $\varphi_2(a)$ étant des fonctions entières de a, pour lesquelles on trouve les développements *arithmétiques* :

$$\varphi_1(a) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n+\frac{1}{4}} \mathop{\mathrm{S}'}_{8n+1} (-1)^{\frac{\alpha+1}{2}} \cos\beta a,$$
$$\varphi_2(a) = \sum_{n=1}^{\infty} q^{2n-\frac{1}{4}} \mathop{\mathrm{S}''}_{8n-1} (-1)^{\frac{\alpha+1}{2}} \cos\beta a.$$

Les sommes S′ et S″ portent respectivement sur les représentations

$$8n \pm 1 = \alpha^2 - 2\beta^2,$$

avec α, β entiers,

$$\beta \gtreqless 0, \qquad \alpha > 2|\beta|.$$

Sans développer ici les conséquences arithmétiques de (14), nous indiquerons un autre lien entre φ_1, φ_2 et nos fonctions numériques; on a, en effet, avec nos notations habituelles (*loc. cit.*),

$$\varphi_1(a) = -\frac{\eta_1}{2}\,\frac{\zeta\left(a + \frac{\pi}{2}\right) + \theta\theta_1}{\Theta_1(a, q^2)}, \qquad \varphi_2(a) = \frac{\eta_1}{2}\,\frac{\zeta\left(a + \frac{\pi}{2}\right) - \theta\theta_1}{H_1(a, q^2)};$$

---

[1] Je signale ici quelques fautes d'impression au Tome 158 des *Comptes rendus* :

	Au lieu de :	*Lire :*
Page 223, équation (12).......	$f(2h+1)$	$f(2k+1)$
Page 224, équation (13).......	$f(x)$	$f(\alpha)$
Page 224, équation (15).......	$f(x)$	$f(\alpha)$
Page 293, ligne 10 du n° 1.....	$\theta_1^2 H_1(y)\,\Theta(y)$	$\theta_1^2 H_1(y)\,\Theta(y)$; $\Theta_1^2(y)$

d'où de nouvelles identités arithmétiques. Par exemple, F désignant une fonction *paire* d'une variable, et N un entier positif donné, *non carré*, on a

$$\sum (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}} F(\beta + k) = 0,$$

Σ s'étendant aux représentations

$$8N + 1 = 2k^2 + \alpha^2 - 2\beta^2$$

avec α, β, k entiers,

$$k \text{ et } \beta \gtreqless 0 \quad \text{et} \quad \alpha > 2|\beta|.$$

Ajoutons enfin que, si l'on regarde $V(a, z)$ comme fonction des deux variables indépendantes $u = a - z$ et $v = z$, elle est *symétrique* par rapport à u et v, ce qui justifie encore l'introduction de l'élément $\xi(a, z)$.

Le Prince **Bonaparte** fait hommage à l'Académie du deuxième fascicule de ses *Notes ptéridologiques* qu'il vient de publier. Dans ce travail on trouve les résultats de l'examen que l'auteur a fait d'environ 1880 spécimens de Ptéridophytes qu'il a eu à étudier et qui proviennent surtout d'Afrique. Il donne les déterminations de 684 espèces et de 156 variétés dont beaucoup sont différentes. Deux espèces et treize variétés sont nouvelles.

En présentant ces *Notes* l'auteur fait remarquer la difficulté qu'il y a à séparer entre elles beaucoup d'espèces dont les limites sont souvent bien mal définies et floues. Il attache une grande importance aux petits caractères dits *caractères jordaniens* à cause de leur grande fixité dans la nature.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les zéros de $\zeta(s)$ de Riemann.* Note de M. **C. de la Vallée Poussin.**

1. M. G.-H. Hardy a découvert ([1]) que $\zeta(s)$, où $s = \sigma + it$, a une infinité de racines sur la droite $\sigma = \frac{1}{2}$. Je vais prouver que *le nombre de ces racines pour lesquelles $|t|$ est $< T$ infiniment grand n'est pas d'ordre inférieur à $\sqrt{T}$.* Je ne considère ici que les racines d'ordre impair et je ne les compte qu'une fois si elles sont multiples ([2]).

([1]) *Comptes rendus*, t. 158, 1914, p. 1012.

([2]) M. Landau a abordé le même sujet et étendu le théorème de M. Hardy aux fonctions liées à la progression arithmétique (*Math. Ann.*, B. 76, 1915).

Je pose, en sorte que $\rho(t)$ est une fonction paire,

$$s = \frac{1}{2} + ti, \qquad \rho(t) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s).$$

M. Hardy démontre la formule (sauf une correction indiquée par M. Landau)

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha t} \rho(t)\, dt = -4\pi \cos\frac{\alpha}{2} + 2\pi e^{\frac{\alpha i}{2}} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi e^{2\alpha i}},$$

où α est un paramètre dont la partie réelle est comprise entre $\pm \frac{\pi}{4}$. Si t tend vers $+\infty$, $\rho(t)$ devient $< e^{\varepsilon t} e^{-\frac{\pi}{4} t}$ quelque petit que soit ε, en vertu des formules d'approximation de Γ, de telle sorte que l'intégrale (1) est absolument convergente.

Je remplace α par $\frac{\pi}{4} - u$, où u aura sa partie réelle positive. J'obtiens ainsi

$$\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi e^{2\alpha i}} = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 \pi\, 2 e^{-ui} \sin u}$$

$$= \frac{e^{\frac{ui}{2} - \frac{\pi i}{8}}}{\sqrt{2 \sin u}} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi \frac{e^{ui}}{2 \sin u}},$$

comme on s'en assure aisément en faisant $\omega = \frac{1}{2}$ et $z = 2 e^{-ui} \sin u$ dans la formule connue ([1])

$$\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi z} \cos(2 n \pi \omega) = \frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-(n+\omega)^2 \frac{\pi}{z}}.$$

Après simplifications, la formule (1) revient ainsi à la forme (réelle)

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(\frac{\pi}{4} - u\right) t} \rho(t)\, dt = -4\pi \cos\left(\frac{u}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + \psi(u) \\ &\psi(u) = \frac{4\pi}{\sqrt{2 \sin u}} \sum_{0}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi}{2 \operatorname{tang} u}}. \end{aligned} \right.$$

2. On voit immédiatement que $\psi(u)$ et ses dérivées s'annulent pour $u = 0$. Je calcule les majorantes de ces dérivées par le procédé classique. Ainsi, soient u un point de l'axe réel positif, C un cercle de centre u et de

---

([1]) M. Landau fait un usage analogue de cette formule.

rayon λu ($\lambda < 1$), ε une quantité complexe infiniment petite avec u. On a, sur le cercle C,

$$|\psi(z)| = \left| \frac{4\pi(1+\varepsilon)}{\sqrt{2z}} e^{-\frac{\pi}{8z}} \right| < \frac{A}{\sqrt{(1-\lambda)u}} e^{-\frac{\pi}{8(1+\lambda)u}},$$

où A est numérique. Par conséquent, le rayon de C étant λu,

$$(3) \qquad \psi^{(2k)}(u) < \frac{(2k)!}{(\lambda u)^{2k}} \frac{A}{\sqrt{(1-\lambda)u}} e^{-\frac{\pi}{8(1+\lambda)u}}.$$

3. Soient $\rho_1 < \rho_2, \ldots, \rho_n, \ldots$ les racines distinctes, réelles, positives et d'ordre impair de $\rho(t)$. Je dis que l'*on peut assigner une constante h telle que l'on ait $\rho_n < h(2n-1)^2$ pour une infinité de valeurs de n.*

En effet, je suppose qu'à partir d'un certain indice on ait la relation inverse

$$\rho_n > h(2n-1)^2;$$

je forme alors la fonction entière, paire ainsi que $\rho(t)$,

$$\varphi(t) = \left(1 - \frac{t^2}{\rho_1^2}\right)\left(1 - \frac{t^2}{\rho_2^2}\right)\cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_{2k} t^{2k}.$$

Les coefficients a_{2k} sont positifs et (à condition de prendre le coefficient B suffisamment grand) inférieurs aux coefficients des mêmes puissances de t dans la fonction obtenue en substituant $h(2n-1)^2$ à ρ_n dans l'expression de B $\varphi(t)$, à savoir

$$B \cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{t}{h}}\right) \cos\left(\frac{\pi i}{2}\sqrt{\frac{t}{h}}\right) = B\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\pi^{4k}}{(4k)!\,(2h)^{2k}} t^{2k}.$$

De là, la relation

$$(4) \qquad \alpha_{2k} < \frac{B}{\Gamma(4k+1)}\left(\frac{\pi^2}{2h}\right)^{2k} = \frac{B\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(2k+\frac{1}{2}\right)\Gamma(2k+1)}\left(\frac{\pi^2}{8h}\right)^{2k}.$$

Je dérive l'équation (2), par rapport à u, successivement $2, 4, \ldots, 2k, \ldots$ fois, je multiplie ces résultats successifs par $a_0, -a_1, \ldots, \pm a_{2k}, \ldots$ respectivement et j'ajoute. J'obtiens, sans incertitude sur la convergence, parce que la série positive $\Sigma a_{2k} t^{2k}$ est de l'ordre de $e^{\sqrt{t}}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \varphi(t) e^{\left(\frac{\pi}{4}-u\right)t} \rho(t)\,dt = \pi\varphi\left(\frac{i}{2}\right)\cos\left(\frac{u}{2}-\frac{\pi}{8}\right) + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_{2k}\,\varphi^{(2k+2)}(u).$$

Le premier membre est négatif, car $\varphi(t)\,\rho(t)$, qui n'admet aucun changement de signe, est, avec $\zeta\left(\frac{1}{2}\right)$, négatif pour $t=0$; le premier terme du second membre est positif; donc il y a contradiction si la série finale tend vers zéro avec u. Cherchons des valeurs de h qui assurent cette condition.

Par la substitution des majorantes (3) et (4), nous voyons que le module de cette dernière série est inférieur à l'expression

$$\frac{AB}{\lambda^2 u^2 \sqrt{(1-\lambda)u}}\, e^{-\frac{\pi}{8(1+\lambda)u}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)(2k+2)}{\Gamma\left(2k+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{\pi^2}{8h\lambda u}\right)^{2k}.$$

Cette expression est, quel que soit ε positif, d'ordre inférieur à

$$\frac{1}{u^2\sqrt{u}}\, e^{-\frac{\pi}{8(1+\lambda)u}} \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(2k+1)} \left[\frac{\pi^2(1+\varepsilon)}{8h\lambda u}\right]^{2k} < \frac{1}{u^2\sqrt{u}}\, e^{-\left(\frac{1}{1+\lambda} - \frac{\pi+\pi\varepsilon}{\lambda h}\right)\frac{\pi}{8u}}.$$

La série tend donc vers zéro avec u si h est $> \pi\frac{1+\lambda}{\lambda}$, ce qui aura lieu pour un $\lambda < 1$ si h est $> 2\pi$. Concluons donc :

Si h est une constante $> 2\pi$, on a $\rho_n > h(2n-1)^2$ pour une infinité de valeurs de n. Autrement dit, *le nombre des racines réelles d'ordre impair de $\rho(t)$, de valeur absolue $< T$, surpasse $\sqrt{\frac{T}{h}}$ pour des valeurs convenables de T aussi grandes qu'on le veut.*

Cette méthode ne s'applique pas à toutes les fonctions qui interviennent dans l'étude de la progression arithmétique. Je me propose d'indiquer, dans une Note ultérieure, les résultats auxquels on aboutit quand on introduit à la place de $\varphi(t)$ un développement trigonométrique. Ces résultats compléteront les précédents et s'appliqueront à tous les cas.

ASTRONOMIE. — *Avantages des cercles à la fois mobiles et à multiple origine.* Note [1] de M. A. Verschaffel.

Une Note a été publiée dans les *Comptes rendus*, t. 162, 1916, p. 935, sur la possibilité d'avoir sur un cercle divisé étudié plusieurs traits (autant qu'on a de paires de microscopes installés sur le cercle), sans erreur.

---

[1] Séance du 16 octobre 1916.

J'exprimai à la fin de cette Note, en une simple ligne, le vœu de voir les constructeurs dans la possibilité de fournir aux astronomes des cercles mobiles.

Je voudrais dans la présente Note mettre en évidence, avec quelques détails, les avantages d'un cercle mobile et à la fois étudié sur une multiple origine. Les deux conditions se combinent heureusement.

Un cercle à multiple origine sans erreur présente de sérieux avantages dans diverses opérations astronomiques; mais son privilège se limite à une seule direction s'il est fixe. S'il peut être tourné autour de son axe sans difficulté et sans rien perdre par ailleurs, ses avantages peuvent être utilisés toutes les fois qu'il y a des opérations à faire pour lesquelles on désire la plus haute précision.

On a déjà fait usage de cercles mobiles dans les déterminations de latitude et d'azimut sous les noms d'instruments de *répétition* et de *réitération*. On en trouve un exemple bien exposé, dans le Tome VIII des *Annales de l'Observatoire de Paris*, par Yvon Villarceau.

Je ne connais pas de grands instruments, de cercles méridiens, qui jouissent de cette faculté. C'est regrettable.

Prenons un problème purement astronomique : la détermination de la déclinaison d'une étoile x avec un cercle méridien en utilisant n étoiles de comparaison, a, b, c, ..., n.

L'observation d'une étoile en déclinaison comporte un grand nombre de causes d'erreur; la seule énumération en serait longue. On ne considérera ici que l'erreur finale qui découle des erreurs des traits. Les formules seront ainsi plus simples.

I. On suppose le cercle fixe et étudié à une origine unique.

Le cercle étant fixe, il faut prévoir que chaque étoile sera observée à un trait particulier :

L'étoile x sera observée au trait T_x, dont l'erreur est e';
L'étoile a sera observée au trait T_a, dont l'erreur est e;
L'étoile b sera observée au trait T_b, dont l'erreur est e;
L'étoile c sera observée au trait T_c, dont l'erreur est e;
....;
L'étoile n sera observée au trait T_n, dont l'erreur est e.

Il est naturel de supposer, *a priori*, que les traits employés ont tous une même erreur moyenne, la même en grandeur. On a cependant accentué l'erreur du trait T_x parce que ce trait joue un rôle spécial.

Le cercle étant fixe, l'étoile x sera toujours lue sur le même trait T_x, affecté de l'erreur e'. Si l'on fait n pointés sur cette étoile, dans la moyenne des n résultats, les erreurs de lecture et d'autres se compenseront plus ou moins, mais la moyenne restera toujours affectée de l'erreur entière du trait, soit e', qui devient ici une erreur systématique.

Les n étoiles de comparaison seront lues, si on les choisit bien, sur n traits différents. L'erreur de la moyenne des n erreurs du trait sera $\frac{e}{\sqrt{n}}$.

La déclinaison vraie d'une étoile x, $\mathcal{D}_x$, se déduit d'une étoile de comparaison, ou d'un système d'étoiles de comparaison, d'après la formule suivante :

$$\mathcal{D}_x = \mathcal{D}_y + \text{lect}_x - \text{lect}_y. \tag{1}$$

$\mathcal{D}_x$ est la déclinaison cherchée; $\mathcal{D}_y$, la déclinaison connue soit d'une étoile ou d'un système d'étoiles; lect_x est la lecture, corrigée autant que possible, faite sur l'étoile x; lect_y est la lecture, corrigée autant que possible, du système de comparaison.

Nous savons que la lecture x est affectée d'une erreur e' et la lecture y, d'une erreur $\frac{e}{\sqrt{n}}$, système de n étoiles.

Ajoutons ces erreurs dans l'équation (1) et il vient

$$\mathcal{D}'_x = \mathcal{D}_y + \text{lect}_x + e' - \left(\text{lect}_y + \frac{e}{\sqrt{n}}\right). \tag{2}$$

Nous avons la déclinaison vraie dans l'équation (1).

Faisons les différences des deux valeurs, nous aurons l'erreur de $\mathcal{D}'_x$:

$$(2) - (1) = e' - \frac{e}{\sqrt{n}}.$$

Nous savons par les principes de probabilité que la combinaison de ces deux erreurs a pour expression

$$E = \sqrt{e'^2 + \frac{e_2}{n}}. \tag{3}$$

C'est l'erreur qui affectera la déclinaison conclue $\mathcal{D}'_x$. On voit qu'elle ne saurait être inférieure à e'.

II. Le cercle est supposé mobile. L'étoile x pourra être lue à n traits différents.

L'erreur de la moyenne des n lectures faites sur les n traits sera $\frac{e'}{\sqrt{n}}$.

Nous trouvons, en opérant comme ci-dessus, que dans le cas présent $\mathfrak{D}'_x$ est atteinte des deux erreurs $\frac{e'}{\sqrt{n}}$ et $\frac{e}{\sqrt{n}}$, dont la valeur est donnée par l'expression

$$\text{(4)} \qquad E' = \sqrt{\frac{e'^2 + e^2}{n}}.$$

III. Si nous avons un cercle mobile à multiple origine sans erreur, et si cette origine est orientée dans les n observations de l'étoile x sur cette étoile, l'erreur e' disparaît entièrement, et l'erreur de la déclinaison $\mathfrak{D}'x$ conclue devient

$$\text{(5)} \qquad E'' = \frac{e}{\sqrt{n}}.$$

Si, dans les équations (2), (3) et (4), nous substituons une valeur numérique plausible à e' et e, par exemple 0",3, pour l'une comme pour l'autre (il n'y a aucune raison pour leur attribuer des valeurs différentes), et si, avec cette substitution, nous mettons $n = 20$, il vient :

Pour (3), $E = 0'',307$, avec cercle fixe;
Pour (4), $E' = 0'',095$, avec cercle mobile étudié à une origine;
Pour (5), $E'' = 0'',067$, avec cercle mobile étudié avec multiple origine.

On voit le grand avantage du cercle mobile dans la diminution rapide de l'erreur probable E, qui est 0",307 avec un cercle fixe, et tombe à 0",095 avec un cercle mobile.

On voit encore que, même avec un cercle mobile, une multiple origine sans erreur conserve de sérieux avantages; l'erreur tombe de 0",095 à 0",067.

IV. Il y a une méthode possible et fort avantageuse dans l'emploi d'un cercle mobile que je n'ai vue indiquée nulle part.

Je vais l'exposer rapidement par un exemple.

Je supposerai, pour faire la démonstration des avantages, qu'on dispose d'un cercle mobile étudié à multiple origine.

Prenons encore le même problème à résoudre :

Déterminer la déclinaison $\mathfrak{D}x$ d'une étoile x au moyen de n étoiles de comparaison affectées d'erreurs de position, mais que nous négligeons tou-

jours pour ne considérer que les erreurs des traits. Nous pourrions supposer ici encore que la même erreur de trait affecte toutes les étoiles de comparaison. Nous distinguerons néanmoins chaque erreur par un indice pour plus d'évidence.

Je supposerai une succession d'observations qu'on n'est nullement obligé de suivre.

1re *détermination*. — Observons d'abord l'étoile x en dirigeant sur elle l'origine sans erreur du cercle dont nous disposons. Soit T_0 cette origine.

Observons une étoile de comparaison, l'étoile a, sur le trait T_a, affecté de l'erreur e_a.

2e *détermination*. — Observons l'étoile x sur le trait T_a affecté de l'erreur e_a, et une deuxième étoile de comparaison, soit l'étoile b, sur le trait T_b affecté d'une erreur e_b.

3e *détermination*. — Observons l'étoile x sur le trait T_b affecté de l'erreur e_b, et la troisième étoile de comparaison c, sur le trait T_c affecté de l'erreur e_c.

. . . .

$n^{\text{ième}}$ *détermination*. — Observons enfin l'étoile x sur le trait T_{n-1} affecté de l'erreur e_{n-1}, et la $n^{\text{ième}}$ étoile de comparaison, sur le trait T_n, affecté d'une erreur e_n.

Écrivons, d'après l'équation (1), les n déterminations de la déclinaison $\mathfrak{D}x$ que nous venons d'indiquer, mais en portant dans ces équations les erreurs que nous savons devoir être commises.

La première détermination de $\mathfrak{D}x$ par l'étoile a et les traits T_0 et T_a donne

$\mathfrak{D}'x = \mathfrak{D}a + \text{lect}_0 - (\text{lect}_a + e_a)$, d'où l'erreur . . . . $-e_a$

La deuxième détermination sur les traits T_a et T_b :

$\mathfrak{D}''x = \mathfrak{D}b + \text{lect}_a + e_a - (\text{lect}_b + e_b)$, d'où les erreurs . . . . $+e_a - e_b$

La troisième opération sur les traits T_b et T_c donnera

$\mathfrak{D}'''x = \mathfrak{D}c + \text{lect}_b + e_b - (\text{lect}_c + e_c)$, d'où les erreurs . . . . $+e_b - e_c$

. . . .

La $n^{\text{ième}}$ détermination sur les traits T_{n-1} et T_n donnera

$\mathfrak{D}^n x = \mathfrak{D}n + \text{lect}_{n-1} + e_{n-1} - (\text{lect}_n + e_n)$, d'où les erreurs . . . . . . $+e_{n-1} - e_n$

La somme des erreurs se réduit à . . . . $-e_n$

Nous avons compensé toutes les erreurs des traits, une seule exceptée. Mais nous avons n déterminations avec seulement une somme d'erreurs e_n, l'erreur de la moyenne des n déterminations sera

$$(6)\qquad E''' = \frac{e_n}{n}.$$

Si nous substituons à e et n les valeurs supposées plus haut 0″, 3 et 20, il vient

$$(6')\qquad E''' = 0^{\circ},015.$$

L'erreur la plus réduite trouvée antérieurement, (5) E″, était 0″,067. E‴ n'est plus que les $\frac{15}{67}$ de E″. Le bénéfice est énorme.

L'ordre suivi dans les observations n'a rien d'essentiel. L'important est que l'étoile à étudier soit observée autant que possible aux traits sur lesquels les étoiles de comparaison sont observées.

On peut toujours observer l'étoile à étudier aux n traits auxquels on observe les étoiles de comparaison — 1. Exceptionnellement on pourrait observer l'étoile x aux n traits auxquels on a observé les n étoiles de comparaison. Si l'on trouvait une étoile n dont la déclinaison fût égale à $\mathfrak{D}_x - \mathfrak{D}_{n-1}$, l'étoile $\mathfrak{D}_n$ tomberait sur le trait T_0 sans erreur. L'erreur des traits dans la dernière détermination se réduirait à e_{n-1}. La somme d'erreurs des n opérations se réduirait à 0 et, naturellement, l'erreur de la moyenne des n déterminations serait

$$(7)\qquad E^{IV} = 0.$$

Sans doute, les erreurs des traits ne sont qu'une des causes qui vicient les déterminations des déclinaisons. La diminution de ces erreurs est cependant de nature à améliorer, avec le temps, les positions des étoiles de comparaison et agit ainsi doublement.

Nous pouvons donc conclure, sans hésitation, qu'il est du plus grand intérêt pour l'Astronomie d'avoir des cercles mobiles étudiés avec une multiple origine.

Mais la dette de reconnaissance des astronomes envers les constructeurs grandirait encore si les constructeurs pouvaient, en même temps qu'ils fourniraient des cercles mobiles, rendre ces cercles parfaitement équilibrés sous l'action de la pesanteur et exempts de tassements irréguliers.

Les cercles parfaitement équilibrés sous l'action de la pesanteur n'ont besoin que d'une faible pression pour être fixés sur l'axe d'une manière

invariable, aucune force ne cherchant alors à les faire tourner autour de l'axe. Cette faible pression, nécessaire pour les fixer, ne les déformera pas.

Il est à remarquer que les seuls mouvements à craindre sont les mouvements de rotation inopportune. Ils me paraissent les plus faciles à éviter. Un léger changement dans le centrage n'aurait pas d'inconvénient si on lit toujours deux microscopes opposés et, *a fortiori*, si on lit tous les microscopes dont le cercle est muni, comme la haute précision que nous voulons atteindre le prescrit indubitablement.

CORRESPONDANCE.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale, parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

1° 1468 *estrellas del preliminary general Catalogue de* Boss, *cuyas posiciones aparentes figuran en las principales efemérides astronómicas. Lista redactada por* D. Ignacio Tarazona Blanch. (Présenté par M. G. Bigourdan.)

2° *La teoria atomistica e Sebastiano Basso, con notizie e considerazioni su William Higgins*, par Icilio Guareschi. (Présenté par M. A. Haller.)

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Les séries trigonométriques et les moyennes de Cesàro.* Note de M. **W.-H. Young**, présentée par M. Émile Picard.

Le succès obtenu par les moyennes de Cesàro dans la théorie des séries de Fourier semble tenir de la nature même de ces séries. Demandons, par exemple, un critérium qu'une série trigonométrique soit une série de Fourier d'une fonction dont la $(1+p)^{\text{ième}}$ puissance soit sommable, $(0<p)$: la condition suffisante et nécessaire est que

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f_n(x)]^{1+p}\, dx$$

soit bornée, quand n croît indéfiniment, $f_n(x)$ étant la $n^{\text{ième}}$ moyenne de Cesàro, indice 1, c'est-à-dire la moyenne arithmétique des n premières sommes de la série. Ou bien, poursuivons la voie ouverte par Riemann, et nous arriverons à des théorèmes tels que le suivant :

Si les limites supérieure et inférieure d'indétermination des moyennes de Cesàro, indice $\leqq 1$, *d'une série trigonométrique, dont les coefficients convergent vers zéro, sont sommables, et partout finies sauf aux points d'un ensemble sans parties parfaites, la série est une série de Fourier.*

On trouve aussi que la convergence par les moyennes de Cesàro d'une série de Fourier résulte de conditions beaucoup moins strictes que ne demande la convergence ordinaire. Après M. Fejér, M. Lebesgue et d'autres géomètres se sont occupés de ces questions. Je me propose de faire ici quelques remarques à propos des critériums obtenus.

I. Ils sont liés plutôt aux séries dérivées des séries de Fourier qu'à ces dernières séries elles-mêmes. Ceci résulte du théorème, facilement démontré, que *la convergence* (Cp) (¹) *de sa* $p^{\text{ième}}$ *série dérivée d'une série de Fourier dans un point* x, *ne dépend que des valeurs de la fonction dans le voisinage de ce point.* Ainsi, en tenant compte de ce fait, les procédés employés par les auteurs cités conduisent à des extensions bien sensibles de leurs théorèmes.

II. Pour obtenir ces critériums, la méthode à employer n'est pas la méthode directe. Il vaut mieux, comme je l'ai remarqué il y a quelques années, les déduire des conditions de convergence ordinaire des séries de Fourier. On obtient en effet des critériums pour la convergence (Cp) de la $p^{\text{ième}}$ série dérivée de la série de Fourier de $f(x)$, comme conséquence immédiate des conditions de convergence ordinaire au point $u=0$ de la série de Fourier d'une fonction auxiliaire,

$$\varphi_1(u)=\frac{[f(x+u)-f(x-u)]}{u},$$

pour la première,

$$\Phi_2(u)=\left[\frac{f(x+u)+f(x-u)-2f(x)}{u^2}\right]$$

pour la seconde dérivée, et ainsi de suite.

Comme exemple des théorèmes ainsi obtenus, prenons le suivant :

La première série dérivée de la série de Fourier de $f(x)$ *converge* (C_1) *dans un point* x *où* $f(x)$ *possède une dérivée généralisée, pourvu que dans un voisinage de* $u=0$, *aussi petit que l'on veut,*

$$\frac{1}{u}\int_0^u \left| d[f(x+u)-f(x-u)] \right|$$

(¹) (Cp) signifie, par les moyennes de Cesàro, indice p.

soit bornée. Ou bien, *la seconde série dérivée converge* (C_2) *dans un point* x *où* $f(x)$ *possède une seconde dérivée généralisée, pourvu que*

$$\frac{1}{u}\int_0^u \left\{ \frac{d[f(x+u)+f(x-u)-2f(x)]}{u} \right\}$$

soit bornée dans un tel voisinage.

Pour la démonstration on emploie une légère extension du théorème que j'ai donné le 21 août dernier ([1]).

Ces résultats contiennent plusieurs cas spéciaux intéressants, entre autres ceux de MM. Fejér et Lebesgue, et celui où les nombres dérivés de $f(x)$ sont continus au point considéré. D'autre part, le premier des deux résultats nous donne la réponse affirmative pour une fonction bornée $\varphi(x)$ à la question posée par M. Lebesgue à propos de la convergence (C_1) de la série de Fourier de $\varphi(x)$. On en conclut, en effet, que *si*, *dans un intervalle* (a, b), $f(x)$ *est l'intégrale d'une fonction bornée* $\varphi(x)$, *la première série dérivée de la série de Fourier de* $f(x)$ *converge* (C_1) *dans chaque point* x *de* (a, b) *où* $f(x)$ *possède une dérivée*. Par contre, le résultat actuellement obtenu par M. Lebesgue, où (C_2) remplace (C_1), rentre dans un corollaire analogue au second des deux résultats.

Nous signalerons un corollaire d'un autre genre, qui généralise le théorème de M. Lebesgue, qu'une série de Fourier converge (C_1) presque partout :

La première série dérivée de la série de Fourier d'une fonction qui est une intégrale dans un intervalle quelconque (a, b) *converge* (C_1) *presque partout en* (a, b).

III. Si la fonction $f(x)$ est à variation bornée, il est permis d'écrire $(C, p-1+k)$ au lieu de (Cp) dans le théorème cité sous (I), k étant une quantité positive quelconque, $(0 < k)$. Nous arrivons donc dans la majorité des cas à faire la modification correspondante en (II), e. g. dans les exemples cités.

IV. Cependant ce n'est que très exceptionnellement que la $p^{\text{ième}}$ série dérivée converge $(C, p-1)$. Pour cela, il faudrait des conditions exceptionnelles. Mais de tels cas existent et ne sont pas sans intérêt. Pour le voir il suffit de prendre $p = 1$; *la première série dérivée de la série de Fourier d'une fonction* $f(x)$ *paire, qui est une intégrale sauf à l'origine, converge* (Co),

---

([1]) *Comptes rendus*, t. 163, 1916, p. 187.

c'est-à-dire ordinairement, au point $x (x \gtrless 0)$, *si*

$$(1a)\qquad \lim_{u=0} uf'(u) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{u=0} \frac{1}{u}\int_0^u d[u^2 f'(x)] = 0,$$

ou bien

$$(1b)\qquad f(u) - \frac{1}{u}\int_0^u f(u)\,du$$

est une intégrale, qui converge vers zéro quand u s'approche de zéro ; supposant remplie une condition (2) *quelconque qui nécessite la convergence ordinaire au point* x *de la série de Fourier d'une fonction sommable égale à* $f'(x)$ *presque partout dans le voisinage du point* x *considéré.*

V. Si au lieu d'un point unique on envisage un intervalle de valeurs x, la convergence signalée devient uniforme, si la série auxiliaire converge uniformément. Ainsi, on généralise facilement les théorèmes sur l'intégration terme à terme. On aura, par exemple, le suivant :

La première série dérivée de la série de Fourier de $f(x)$ *multipliée par* $g(x)$, *et intégrée terme à terme de* a *jusqu'à* b, *converge* (C 1) *vers* $\int_a^b g(x)\frac{df}{dx}dx$ *pouvu qu'une des conditions suivantes soit remplies :*

1° $g(x)$ *est bornée et* $f(x)$ *sommable, ou vice versa ;*

2° $[g(x)]^{1+q}$ et $[f(x)]^{1+\frac{1}{q}}$ *sont sommables* $(0 < q)$.

VI. Remarquons aussi que la série de Fourier d'une fonction à variation bornée converge (C, $k - 1$) en chaque point $(0 < k)$, et que, si la fonction est une intégrale, on aura même $(0 \leqq k)$.

VII. En conclusion, c'est à signaler qu'il y a une théorie analogue, où la série alliée remplace la série de Fourier.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les séries à termes positifs et sur les fonctions dérivées.* Note de M. **D. Pompeiu**, présentée par M. Appell.

1. Soit

$$(1)\qquad s = a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots$$

une série à termes positifs, que je suppose convergente. Je pose

$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1},$$
$$r_n = a_n + a_{n+1} + \ldots,$$

et je forme le rapport

$$\rho_n = \frac{a_n}{r_n} = \frac{a_n}{a_n + a_{n+1} + \ldots} \qquad (0 < \rho_n < 1).$$

Lorsqu'on fait tendre n vers l'infini les nombres ρ_n formant un ensemble borné, cet ensemble admet au moins un élément limite ρ. Si ce nombre limite est *unique*, nous dirons que la convergence de la série (1) est *régulière*.

Dans le cas de la convergence régulière le nombre ρ peut servir comme une indication relative à la rapidité de la convergence : des exemples simples

$$e = 1 + \sum_1^\infty \frac{1}{n!}, \qquad \frac{1}{1-\theta} = \sum_0^\infty \theta^n \quad (\theta < 1), \qquad 1 = \sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)}$$

pourront illustrer cette remarque.

On peut appeler, dans le cas où $\rho = 0$, la convergence de (1) *extrêmement faible* et, dans le cas où $\rho = 1$, convergence *extrêmement forte*.

Sans insister davantage sur les indications qu'on peut tirer du nombre ρ relativement à la convergence de (1), je me propose de montrer comment la notion de convergence extrêmement faible s'introduit dans une question concernant les fonctions dérivées.

2. On sait qu'une fonction dérivée est, en général, discontinue. Des propriétés intéressantes de ces fonctions ont été mises en évidence par MM. Darboux, Baire, Lebesgue, etc. Mais on ne connaît pas, à ce que je sais, un système simple de conditions pour exprimer, d'une façon nécessaire et suffisante, qu'une fonction discontinue donnée est une fonction dérivée. On a, il est vrai, un procédé régulier de calcul permettant de reconnaître si la fonction donnée $f(x)$ est, ou non, une dérivée : c'est une recherche de limite pour une certaine expression ([1]). Mais ce procédé de calcul exprime plutôt une condition théorique et il est toujours intéressant de pouvoir la transformer en une condition de caractère plus pratique. C'est pourquoi j'espère que l'exemple précis que je vais considérer ici pourra présenter quelque intérêt.

Je prends le cas simple d'un seul point de discontinuité et, pour la simplicité aussi, je placerai cette discontinuité à l'extrémité b de l'intervalle (a, b) où $f(x)$ se trouve définie. Ainsi $f(x)$ est continue en a et

([1]) Voir LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration*, p. 82.

aussi dans l'intérieur de (a, b), mais elle possède une discontinuité en b.

Pour voir si en b on peut attribuer à $f(x)$ une valeur telle que l'intégrale indéfinie de $f(x)$ admette cette valeur comme dérivée en b, on calcule la fonction intégrale

$$F(\xi) = \int_a^\xi f(x)\,dx \qquad (a \leqq \xi \leqq b)$$

et l'on forme l'expression

$$\frac{F(\xi) - F(b)}{\xi - b} = \frac{1}{\xi - b}\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

Si cette expression tend vers une limite bien déterminée lorsque ξ tend vers b, alors $F(x)$ admet en b une dérivée (à gauche) et l'on attribue cette valeur limite à $f(x)$ au point b.

3. Cela rappelé, je vais considérer un exemple précis : Adoptant une figuration géométrique, je marque sur l'axe Ox les points A et B pour représenter les extrémités a et b de l'intervalle (a, b). Dans cet intervalle (a, b) je prends une suite croissante de nombres

$$(2) \qquad b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

admettant b comme nombre limite et je marque sur Ox les points $B_1, B_2, \ldots$ correspondant aux nombres de la suite (2). Sur chacun des segments $B_n B_{n+1}$ pris comme base je construis un triangle isoscèle $B_n C_n B_{n+1}$, de hauteur constante h. La ligne polygonale $ACB_1 C_1 B_2 \ldots$ représente une fonction $f(x)$ qui possède une seule discontinuité : en b.

A quelle condition cette fonction $f(x)$ est-elle une dérivée, même au point de discontinuité b (où, dans le cas affirmatif, il faudra lui attribuer la valeur dont il est question au numéro précédent)?

Si je pose

$$b_n - b_{n-1} = \beta_n \qquad \text{et} \qquad b_1 - a = \beta_1,$$

la condition cherchée s'exprime comme il suit :

Il faut et il suffit que la convergence de la série

$$b - a = \sum_1^\infty \beta_n$$

soit extrêmement faible.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur l'unicité du développement trigonométrique.* Note de M. D. **Menchoff**, présentée par M. Hadamard.

Dans la présente Note je me propose de démontrer l'existence d'une série trigonométrique à une infinité de coefficients non nuls qui converge uniformément vers zéro dans $(0, 2\pi)$, sauf sur un ensemble parfait *de mesure nulle*.

D'abord nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme. — *Il existe une fonction* $\mathfrak{F}(x)$, *non identique à une constante absolue, continue dans* $(0, 2\pi)$, *constante dans chaque intervalle contigu à un ensemble parfait* P de mesure nulle, *pour laquelle on a*

$$\lim_{n=\infty} n \int_0^{2\pi} \mathfrak{F}(\alpha) \cos n(\alpha - x)\, d\alpha = 0$$

uniformément dans $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$.

Nous commençons par définir l'ensemble parfait P. Dans le procédé de définition de P, excluons d'abord dans le domaine $(0, 2\pi)$ un intervalle concentrique dont la longueur est la moitié. A la seconde opération, excluons dans chacun des deux intervalles restants un intervalle concentrique dont la longueur est le tiers. A la $k^{\text{ième}}$ opération, excluons dans chacun des 2^{k-1} intervalles restants un intervalle concentrique dont la longueur est $\frac{1}{k+1}$ de sa longueur, et ainsi de suite. La longueur totale des intervalles conservés après la $k^{\text{ième}}$ opération est égale à $\frac{2\pi}{k+1}$. Donc, en continuant ainsi, nous formerons un ensemble parfait P *de mesure nulle*.

Soit S_k le système des intervalles (en nombre $2^k - 1$) enlevés par les k premières opérations. Numérotons ces intervalles d'après la croissance de leurs extrémités gauches : $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_{2^k-1}$. Soit $g_k(x)$ une fonction continue définie dans $(0, 2\pi)$ par les conditions suivantes : $g_k(0) = g_k(2\pi) = 0$; $g_k(x) = \frac{l}{2^{k-1}}$ pour $x \leqq \pi$ situé dans δ_l; $g_k(x) = \frac{2^k - l}{2^{k-1}}$ pour $x \geqq \pi$ situé dans δ_l; $g_k(x)$ varie linéairement en dehors de S_k. La fonction $g_k(x)$ sera représentée géométriquement par une ligne brisée de $2^{k+1} - 1$ côtés.

D'après un calcul élémentaire, nous aurons les propriétés suivantes de la fonction $g_k(x)$:

1° $g_{k+1}(x) = g_k(x)$ dans le système S_k;

2° $|g_{k+1}(x) - g_k(x)| \leqq \frac{1}{2^k(k+2)}$ uniformément dans $(0, 2\pi)$;

3° $g'_k(x) = 0$ dans le système S_k;

4° $g'_k(x) = \pm \frac{k+1}{\pi}$ en dehors de S_k, en prenant le signe + pour $x < \pi$ et le signe — pour $x > \pi$.

Nous en conclurons, d'après la propriété 2°, que les fonctions $g_1(x)$, $g_2(x)$, ..., $g_k(x)$, ... tendent uniformément vers une fonction limite $\mathcal{F}(x)$ continue dans $(0, 2\pi)$ qui est constante dans chacun des intervalles contigus à P et qui n'est pas constante dans le domaine total $(0, 2\pi)$, puisque $\mathcal{F}(0) = 0$ et $\mathcal{F}(\pi) = 1$.

Nous allons démontrer que cette fonction $\mathcal{F}(x)$ vérifie l'énoncé du lemme proposé.

Donnons-nous un entier positif n. Soit k un entier positif tel que $2^{k-1} \leqq n < 2^k$. Nous avons

$$(1) \quad n\int_0^{2\pi} \mathcal{F}(\alpha)\cos n(\alpha - x)\,d\alpha = n\int_0^{2\pi} [\mathcal{F}(\alpha) - g_k(\alpha)]\cos n(\alpha - x)\,d\alpha + n\int_0^{2\pi} g_k(\alpha)\cos n(\alpha - x)\,d\alpha = \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2.$$

D'après la propriété 2°, nous avons $|\mathcal{F}(x) - g_k(x)| < \frac{1}{2^{k-1}k}$ uniformément dans $(0, 2\pi)$, d'où

$$(2) \quad |\mathfrak{z}_1| < \frac{C'}{\log n},$$

C' étant une constante absolue. Pour l'intégrale $\mathfrak{z}_2$ nous avons

$$\mathfrak{z}_2 = -\int_0^{2\pi} g'_k(\alpha)\sin n(\alpha - x)\,d\alpha.$$

Soit $p_k = E[k - \sqrt{k}]$. Définissons les deux fonctions $\Psi_k(x)$ et $\chi_k(x)$ par les fonctions suivantes : $\Psi_k(x) = 0$ dans le système S_{p_k} et $\Psi_k(x) = \pm \frac{k+1}{\pi}$ en dehors de S_{p_k}, en prenant le signe + pour $x < \pi$ et le signe — pour $x > \pi$; $\chi_k(x) = \mp \frac{k+1}{\pi}$ dans les intervalles de la différence $S_k - S_{p_k}$ des systèmes S_k et S_{p_k}, en prenant le signe — pour $x < \pi$ et le signe + pour $x > \pi$, et $\chi_k(x) = 0$ en dehors de $S_k - S_{p_k}$. Nous avons identiquement $g_k(x) = \Psi_k(x) + \chi_k(x)$, d'où

$$(3) \quad -\mathfrak{z}_2 = \int_0^{2\pi} \Psi_k(\alpha)\sin n(\alpha - x)\,d\alpha + \int_0^{2\pi} \chi_k(\alpha)\sin n(\alpha - x)\,d\alpha = \mathfrak{z}_3 + \mathfrak{z}_4.$$

En désignant par (a, b) un intervalle contigu au système S_{p_k}, nous trouvons

$$|\mathfrak{I}_3| \leqq \frac{k+1}{\pi} \sum \left| \int_a^b \sin n(\alpha - x)\, d\alpha \right| \leqq \frac{k+1}{\pi} \sum \frac{2}{n},$$

où la sommation doit être étendue à tous intervalles (a, b) contigus à S_{p_k}. Comme ces intervalles (a, b) sont en nombre 2^{p_k}, nous avons

$$(4) \qquad |\mathfrak{I}_3| \leqq \frac{k+1}{\pi} \cdot \frac{2}{n} \cdot 2^{p_k} < \frac{C''}{\sqrt{\log n}},$$

où C'' est une constante absolue.

Pour l'intégrale $\mathfrak{I}_4$, nous avons l'inégalité

$$|\mathfrak{I}_4| < \int_0^{2\pi} |\chi_k(\alpha)|\, d\alpha.$$

Comme la fonction $\chi_k(x)$ diffère de zéro seulement dans les intervalles de $S_k - S_{p_k}$ dont la longueur totale est $\frac{2\pi}{p_k+1} - \frac{2\pi}{k+1}$, on a

$$(5) \qquad |\mathfrak{I}_4| < \frac{k+1}{\pi} \left(\frac{2\pi}{p_k+1} - \frac{2\pi}{k+1} \right) < \frac{C'''}{\sqrt{\log n}},$$

C''' étant une constante absolue. En combinant d'une part (1) et (2), d'autre part (3), (4) et (5), il vient finalement

$$\left| n \int_0^{\pi 2} \mathfrak{F}(\alpha) \cos n(\alpha - x)\, d\alpha \right| < \frac{C}{\sqrt{\log n}},$$

C étant une constante absolue, ce qui achève la démonstration du lemme.

C. Q. F. D.

Théorème. — *Il existe une série trigométrique uniformément convergente vers zéro dans* (0, 2π), *sauf un ensemble parfait* de mesure nulle, *et possédant une infinité de coefficients non nuls.*

En effet, la série trigonométrique obtenue en dérivant terme à terme la série de Fourier de la fonction continue $\mathfrak{F}(x)$ est sommable par le procédé de Riemann et représente *zéro* en tous les points de tout intervalle (b, c) extérieur à P. En vertu du lemme précédent, les coefficients de cette série trigonométrique *tendent vers zéro* et sont en infinité non nuls, puisque $\mathfrak{F}(x)$ est non analytique dans (0, 2π). Or, d'après le célèbre théorème de Riemann, la convergence au sens ordinaire de la série trigonométrique

dont les coefficients tendent vers zéro, qui représente f quand on lui applique le procédé de Riemann, ne dépend que de la façon dont se comporte f au voisinage du point considéré, ce qui prouve la proposition.

C. Q. F. D.

Corollaire. — *Si une fonction $f(x)$ admet un développement trigonométrique convergent vers elle presque partout, elle admet une infinité de développements trigonométriques de cette nature.*

ASTRONOMIE PHYSIQUE. — *Observations du Soleil, faites à l'Observatoire de Lyon, pendant le deuxième trimestre de* 1916. Note de **M. J. Guillaume**, présentée par M. B. Baillaud.

Il y a eu 79 jours d'observations dans ce trimestre, et il en résulte les principaux faits suivants :

Taches. — L'augmentation d'activité signalée [1] dans le phénomène des taches a continué : on a, effectivement, enregistré 84 groupes avec une aire totale de 6042 millioniémes, contre 71 groupes et 5184 millioniémes, précédemment.

Dans leur répartition, on a noté 8 groupes en plus au sud de l'équateur (39 au lieu de 31) et 5, en plus également, au nord (45 au lieu de 40).

La latitude moyenne des taches a diminué dans les deux hémisphères : $-17°,9$ au lieu de $-18°,6$, d'une part, et $+16°,4$ au lieu de $+18°,2$, d'autre part.

Le groupe le plus important de ce trimestre :

Mai 26,3 à — 12° de latitude,

a été visible à l'œil nu. A la rotation solaire suivante, il était en période de décroissance, et son deuxième passage au méridien central du disque a eu lieu le

Juin 22,2 à —13° de latitude.

Régions d'activité. — Le développement des facules a pris beaucoup d'extension pendant ce trimestre : on a, en effet, enregistré 152 groupes avec une surface totale de 158,7 millièmes, au lieu de 113 groupes et 102,9 millièmes.

Cette augmentation a été plus forte presque du double dans l'hémisphère austral (25) avec 74 groupes au lieu de 49, que dans l'hémisphère boréal (14) où l'on a noté 78 groupes au lieu de 64.

---

(1) *Comptes rendus*, t. 163, 1916, p. 263.

Tableau I. — *Taches*.

Dates extrêmes d'observ.	Nombre d'observations.	Pass. au mér. central.	Latitudes moyennes. S.	Latitudes moyennes. N.	Surfaces moyennes réduites.
		Avril. — 0,00.			
28-29	2	2,5		+15	14
28- 3	6	3,1	—11		21
29- 4	6	3,9		+18	164
31- 4	5	4,1	—18		26
4	1	4,3		+10	43
10	1	5,5	—21		38
31-11	7	5,9		+ 9	386
1- 4	4	6,5		+12	202
10-12	3	7,3	—12		26
4-10	2	9,7		+15	28
10	1	11,9	—16		3
11-16	6	12,2		+ 3	22
10	1	12,6		+ 9	9
10	1	13,8		+26	3
10-19	9	14,0	—19		63
11-21	10	15,6	—20		40
14-20	6	18,4		+17	7
20-21	2	22,2		+10	20
18-25	5	23,9		+25	13
20-26	6	25,8		+20	24
20- 1	12	26,6		+21	100
20- 2	13	26,6	—27		239
25-29	5	27,2		+19	8
24-26	3	28,0	—19		7
27	1	28,6	—12		2
25- 2	8	29,2	—16		61
	24 j.		—17°,4	+15°,3	
		Mai. — 0,00.			
30- 3	4	1,4	—17		10
28- 5	8	2,0		+11	41
3- 5	3	2,4	—16		11
4- 7	4	4,5		+23	39
29-11	13	5,4		+10	215
29-11	13	5,7	—15		183
30-11	12	6,2		+13	231
2- 9	8	6,9		+14	44
3- 6	4	9,1	—18		10
9-12	4	9,8	—12		5
12	1	11,3	—23		2
6-17	10	12,2	—20		52
10-13	4	12,8	—22		10
11-21	9	17,1	—19		23
13-24	10	18,8		+25	34
16-18	3	20,6		+ 8	7
16-19	4	21,5		+27	21
		Mai (suite).			
18-19	2	22,8	—26		6
19-25	7	23,3		+13	53
20-31	10	25,7		+20	48
21- 1	10	26,3	—12		872
21- 1	10	27,2		+12	60
27-31	4	28,0		+14	8
23- 2	9	28,0	—16		73
23-28	3	28,1		+ 5	6
25-30	4	28,2	—21		16
27	1	28,5		+ 7	3
25- 4	4	29,3		+12	14
27-28	2	29,7	—14		3
4- 6	3	31,2		+12	79
	27 j.		—17°,9	+14°,1	
		Juin. — 0,00.			
27- 7	10	1,5		+10	128
30- 1	2	1,8	—16		4
4- 8	5	2,0		+10	428
7- 8	2	3,7	—22		14
5-10	3	6,6	—18		9
10-11	2	7,7	—18		4
11	1	10,7		+24	4
12-13	2	14,1	—15		5
9-15	5	14,2	—23		4
8-20	12	14,4		+ 7	256
9-16	7	15,1		+ 9	43
18-22	5	16,4		+12	53
19-24	6	21,4		+17	35
15-27	12	22,2	—13		375
25-28	4	23,2	—18		36
18-29	13	23,6		+17	216
22-27	2	23,8	—10		2
20-21	2	23,9	—22		4
23-30	8	24,4	—14		124
19-26	8	25,2		+11	56
22-30	9	25,7		+20	18
24-27	3	25,8	—21		6
21-25	5	26,0		+26	20
21- 3	13	27,2		+13	154
21- 2	12	27,9		+12	117
22-30	9	28,5	—20		21
23- 1	9	28,7		+11	143
2- 5	4	29,8	—27		15
	28 j.		—18°,4	+14°,2	

Tableau II. — *Distribution des taches en latitude.*

1916.	Sud.						Nord.						Totaux mensuels.	Surfaces totales réduites.
	90°–40°.	40°–30°.	30°–20°.	20°–10°.	10°–0°.	Somme.	Somme.	0°–10°.	10°–20°.	20°–30°.	30°–40°.	40°–90°.		
Avril.......	»	»	2	9	»	11	15	5	7	3	»	»	26	1569
Mai.........	»	»	4	10	»	14	16	4	9	3	»	»	30	2179
Juin........	»	»	5	8	1	14	14	4	8	2	»	»	28	2294
Totaux....	»	»	11	27	1	39	45	13	24	8	»	»	84	6042

Tableau III. — *Distribution des facules en latitude.*

1916.	Sud.						Nord.						Totaux mensuels.	Surfaces totales réduites.
	90°–40°.	40°–30°.	30°–20°.	20°–10°.	10°–0°.	Somme.	Somme.	0°–10°.	10°–20°.	20°–30°.	30°–40°.	40°–90°.		
Avril.......	»	2	9	12	2	25	22	2	11	5	2	2	47	46,5
Mai.........	1	1	13	9	2	26	32	6	15	9	1	1	58	58,5
Juin........	»	1	10	9	3	23	24	4	10	10	»	»	47	53,7
Totaux....	1	4	32	30	7	74	78	12	36	24	3	3	152	158,7

HYDRAULIQUE. — *Sur la détermination de la vitesse de propagation a dans les conduites forcées industrielles.* Note [1] de M. C. Camichel.

La détermination de la vitesse de propagation a dans les conduites forcées est une question fondamentale; or toutes les expériences connues paraissent donner une vitesse de propagation notablement supérieure à la valeur théorique, calculée d'après les formules de M. Allievi; je me propose de démontrer, dans cette Note, que cette contradiction provient de la méthode expérimentale employée et qu'elle disparaît si l'on opère avec des précautions convenables. Il est facile de citer des exemples de cette différence entre la vitesse de propagation théorique et la vitesse expérimentale.

Les expériences de l'Ackersand ont donné une période expérimentale inférieure de 4,7 pour 100 à la période calculée. La hauteur de chute était 720^{m}.

Pour la chute du lac Fully, de 1650^{m}, la valeur théorique de la période est $15^{s},97$, comme l'a calculé M. de Sparre, tandis que la valeur expérimentale trouvée par M. Boucher est $13^{s},5$.

Les expériences que j'ai faites à l'usine de Soulom (hauteur de chute 125^{m}) avec M. Eydoux, nous ont donné un résultat analogue; la période propre

(1) Séance du 16 octobre 1916.

d'oscillation de la conduite a été $1^s,36$, tandis que la période théorique était $1^s,46$.

Mais, en revanche, en appliquant, avec M. Eydoux, la méthode ([1]) de la dépression brusque à cette conduite, nous avons trouvé une vitesse concordant avec la vitesse théorique.

Pour expliquer la différence entre la valeur de la période propre trouvée expérimentalement et la valeur théorique de la période, je propose de faire intervenir la constitution de la conduite, en tronçons pour lesquels la vitesse et le diamètre diffèrent; on lira avec intérêt les travaux récents de M. de Sparre ([2]) et de M. Eydoux ([3]) sur cette importante question.

M. de Sparre a étudié le coup de bélier dans une conduite formée de deux sections pour lesquelles la durée de propagation est la même; il considère des périodes $\theta = \frac{2l}{a} = \frac{2l'}{a'}$, l et l' étant les longueurs, a et a' les vitesses pour les deux sections. Il a établi une formule générale qu'il a appliquée à la conduite de Fully. Cette formule,

$$\zeta_n = (-1)^{n-1}\, 130,6 \frac{\cos \frac{2n-1}{2}\beta}{\cos \frac{\beta}{2}}, \text{ avec } \frac{\beta}{2} = 37^\circ 35',$$

donne le coup de bélier ζ_n (à la fin de la $n^{\text{ième}}$ période θ)

$$\theta = \frac{2l}{a} = 3^s,972,$$

valeur adoptée en partant de la formule d'Allievi.

En utilisant cette formule, dans le cas d'une fermeture de 4 secondes, j'ai trouvé les périodes suivantes :

$15^s,2 \quad 14^s,2 \quad 13^s,2 \quad 14^s,2 \quad 13^s,2 \quad 14^s,2 \quad 13^s,4$

En excluant la première période pendant laquelle a lieu la fermeture, la moyenne des six périodes est $13^s,73$, qui diffère peu de la période observée directement par M. Boucher $13^s,5$. La période théorique est $15^s,9$.

On voit donc que la période théorique se trouve supérieure à la période

---

([1]) *Comptes rendus*, t. 161, 1915, p. 412.

([2]) *Congrès de la Houille blanche de* 1914 (Rapport sur les expériences de Verenon).

([3]) *Comptes rendus*, t. 163, 1916, p. 265.

expérimentale et que la différence observée entre la période de l'oscillation et la période théorique de la conduite s'explique complètement par la structure de la conduite, formée de tronçons pour lesquels le diamètre et l'épaisseur diffèrent.

On peut en conclure que, pour la détermination, dans les conduites forcées des usines, de la vitesse de propagation a, il est inexact d'utiliser, comme on l'a fait jusqu'ici, l'observation de la période d'oscillation, et qu'il est nécessaire d'employer un procédé faisant intervenir une perturbation de courte durée, par exemple la méthode de la dépression brusque. L'utilisation du robinet de vidange des conduites permet, en général, l'application de cette méthode avec la plus grande facilité.

CHIMIE. — *Action chimique du peroxyde de sodium sur l'hydrogène sulfuré.* Note de MM. **C. Zenghelis** et **Stavros Horsch**, présentée par M. Georges Lemoine.

L'action de l'hydrogène sulfuré sur différents peroxydes est bien connue. Les peroxydes de plomb, d'argent et de manganèse s'attaquent le plus vivement en devenant incandescents. Gay-Lussac et Thenard ont examiné la réaction avec le peroxyde de potassium [1]. En le chauffant, il se forme du sulfure avec incandescence.

L'action sur le peroxyde de sodium, d'après ce que nous savons, n'a pas encore été étudiée. Elle est incomparablement plus active. En faisant d'abord passer un courant d'azote dans un tube à combustion contenant le peroxyde dans une nacelle en porcelaine et ensuite un courant d'hydrogène sulfuré, une réaction très vive se produit. La température s'élève beaucoup; le peroxyde devient incandescent et fond. La réaction est encore plus vive si l'on chauffe préalablement le peroxyde. Une petite flamme accompagne alors la réaction et la porcelaine est fortement endommagée.

En présence d'air l'hydrogène sulfuré s'allume. Les produits dépendent beaucoup des conditions de la réaction. Ils sont différents si la réaction se fait en présence d'une grande ou d'une petite quantité d'air, en l'absence d'air, après un chauffage préalable ou non du peroxyde, etc.

L'hydrogène brûle toujours en formant de l'eau qui à son tour peut attaquer partiellement le peroxyde et la réaction devient très compliquée.

---

[1] *Gmelin-Kraut Handb.*, t. II, 1, p. 23.

Quant au soufre, si la réaction a lieu dans une atmosphère d'azote, il se combine avec le sodium pour former des sulfures et des polysulfures. Une petite quantité de sulfure s'oxyde en formant du thiosulfate et du sulfate par l'oxygène dégagé du peroxyde de sodium. Si le courant d'hydrogène est assez fort, une petite quantité de soufre apparaît sur les parois du tube. Si la réaction se fait au contact d'une quantité considérable d'air, par exemple en faisant l'attaque du peroxyde de sodium dans une capsule de porcelaine couverte par un large cylindre en verre et en faisant arriver par en bas un courant d'hydrogène sulfuré, une forte détonation se produit; du sulfate et du soufre libre se déposent, tandis qu'il ne se forme presque point de sulfure.

Après avoir essayé différents procédés proposés pour l'analyse des mélanges de sulfures et polysulfures, de thiosulfates et de sulfates, nous avons séparé les premiers par le nitrate de cadmium; nous nous en sommes servis à la place du carbonate parce que, dans cette dernière réaction, en même temps que le sulfure de cadmium, une petite quantité de soufre se précipite sous forme de lait de soufre. Le thiosulfate était déterminé iodométriquement. Le peroxyde de sodium employé, titré avec le permanganate de potasse, donna en moyenne une teneur de 71 pour 100 en peroxyde.

Les résultats analytiques sont les suivants :

	I.	II.
Poids du peroxyde	0g,8457	0g,5835
Soufre total	0,2583	0,1577
Soufre à l'état de sulfure	0,2030 ($Na^2S = 0^g,4448$)	0,1159 (sulfure + polysulfure)
» » de polysulfure	0,0361 ($Na^2S^2 = 0,0620$)	
» » de thiosulfate	0,0060 ($Na^2S^2O^3 = 0,0148$)	0,0060
» » de sulfate	0,0532 ($Na^2SO^4 = 0,2347$)	0,0368 (1)
Poids de porcelaine attaquée	0,0532	0,0273

Quand la réaction est très forte, ce qui arrive avec un courant assez fort d'hydrogène sulfuré, ou en chauffant préalablement le peroxyde, la température s'élève beaucoup et le fond de la nacelle en porcelaine ou le tube en verre dans lesquels la réaction s'accomplit sont fortement attaqués. Le produit aux points d'attaque prend une coloration bleu verdâtre, due à la petite quantité du fer contenu dans la porcelaine ou le verre, qui se transforme en polysulfure ayant cette couleur. En remplaçant la porcelaine par une lame

(1) $Na^2SO^4 = 0^g,1635$.

de platine, cette coloration n'apparaît pas, notre peroxyde étant exempt de fer. Le platine s'unit au soufre avec un phénomène lumineux. Cette réaction des sels de fer est beaucoup plus sensible que toute autre connue.

PHYSIQUE DU GLOBE. — *Perturbations de la déclinaison magnétique à Lyon (Saint-Genis-Laval) pendant le deuxième trimestre de* 1916. Note de M. **Ph. Flajolet**, présentée par M. B. Baillaud.

Les relevés des courbes du déclinomètre Mascart, pendant le deuxième trimestre de 1916, fournissent la répartition suivante des jours perturbés :

Échelle.		Avril.	Mai.	Juin.	Totaux du trimestre.
0	Jours parfaitement calmes.......	1	3	5	9
1	Perturbations de 1′ à 3′.......	9	11	9	29
2	» de 3′ à 7′.......	7	11	11	29
3	» de 7′ à 15′.......	10	6	3	19
4	» de 15′ à 30′.......	3	0	2	5
5	» > 30′............	0	0	0	0

Il y a eu 3 jours fortement perturbés en avril (15′ le 28; 17′ le 29; 22′ le 25); 2 en juin (17′ le 23; 18′ le 30), et aucun en mai.

Par rapport aux résultats précédents [1], il y a le même nombre de jours dans l'échelle 2, puis diminution de quatre dans les échelles 3 et 4, et de un dans l'échelle 5. Par contre, il y a augmentation de six jours dans l'échelle 1, et de trois dans l'échelle 0.

PHYSIQUE DU GLOBE. — *Résultats d'observations d'aurores boréales exécutées à l'Observatoire de Haldde.* Note [2] de MM. **L. Vegard** et **O. Krogness**, présentée par M. H. Deslandres.

L'Observatoire de Haldde, qui a été créé par l'État norvégien en 1911-1913 sur l'initiative de M. le professeur Kr. Birkeland, a, parmi les principaux sujets de son programme d'études, l'observation des aurores boréales.

Depuis la fondation de l'Observatoire, on s'est principalement attaché,

(1) Séance du 9 octobre 1916.

(2) *Comptes rendus*, t. **163**, 1916, p. 295.

en ce qui concerne les aurores boréales, à obtenir les éléments qui permettent de déterminer leur hauteur au-dessus du sol. Comme l'a montré M. Störmer (¹), on peut, en photographiant l'aurore boréale de deux points en même temps (photographie parallactique), obtenir cette hauteur d'une manière absolument objective.

Or, dans les années 1913 et 1914, l'Observatoire, sous la direction de M. Krogness, a pu rassembler une importante collection de photographies parallactiques, soit en tout 415 paires d'épreuves bien réussies.

L'utilisation de ces nombreux matériaux a été dirigée par M. Vegard, de l'Institut de Physique de Christiania, et les résultats en seront prochainement réunis dans un plus grand Ouvrage, qui paraîtra dans la série des Publications de l'Observatoire de Haldde.

Nous donnons ici dans une courte Note plusieurs résultats statistiques importants de nos calculs qui, jusqu'à présent, comprennent en tout 2487 mesures de hauteur, déterminées avec les 415 paires de photographies citées plus haut.

Pour la plupart des photographies parallactiques, on s'est servi des deux bases suivantes :

Haldde-Gargia, distance $26^{km},3$, direction SE;
Haldde-Bossekop, distance $12^{km},5$, direction ENE;

et l'on a cherché surtout à déterminer les limites supérieures et inférieures des différentes formes d'aurores boréales.

La limite supérieure est la plus variable (de 100^{km} à 330^{km}) et est en même temps très indéterminée, parce qu'il est souvent difficile de dire où cesse la lueur. En général, la méthode photographique donne ici de trop petites valeurs, la lueur supérieure la plus faible n'apparaissant pas sur la plaque.

Les valeurs moyennes de la limite supérieure sont données au Tableau I pour une partie des formes les plus fréquentes d'aurore boréale. Nous remarquons que la limite la plus basse est donnée par les arcs et la plus élevée par les rayons.

TABLEAU I.

Types.	Haldde-Gargia. Nombre.	Haldde-Gargia. Hauteur.	Haldde-Bossekop. Nombre.	Haldde-Bossekop. Hauteur.	Nombre total.	Hauteur moyenne.
		km		km		km
Arcs diffus	57	144,5			57	144,5
Arcs en draperies	72	168,9	117	177,2	189	174,3
Draperies	56	160,2	158	180,6	214	174,8
Rayons	23	252,8	23	227,5	46	240,3

Par contre la limite inférieure est ordinairement très nette et se laisse déterminer d'une manière si exacte que, dans des circonstances favorables, l'erreur ne dépasse

(¹) C. STÖRMER, *Comptes rendus*, t. 150, 1910, p. 1631; *Vid. Selsk. Skr.*, n° 17, 1911, Christiania.

guère 1 pour 100. L'erreur varie cependant beaucoup suivant la forme et la position de l'aurore boréale et selon la qualité de la plaque. Le Tableau II donne les valeurs moyennes de la limite inférieure :

TABLEAU II.

Types.	Haldde-Gargia. Nombre.	Haldde-Gargia. Hauteur.	Haldde-Bossekop. Nombre.	Haldde-Bossekop. Hauteur.	Nombre total.	Hauteur moyenne.
		km		km		km
Arcs diffus	355	109,3	6	113,5	361	109,4
Arcs en draperies	620	105,6	397	108,0	1017	106,5
Draperies	175	112,0	239	109,3	414	110,2
Rayons	26	114	25	117	51	115,5
Rubans à fissures	43	114	»	»	51	115,5
Aurores pulsatives	34	104	»	»	34	104
					1920	108,2

Les trois formes les plus fréquentes d'aurore boréale montrent approximativement la même limite inférieure. Ce qu'il y a de remarquable, c'est que les arcs diffus calmes descendent presque aussi bas que les draperies et plus bas que les rayons, état de choses qui est en contradiction avec l'impression immédiate que l'on obtient en observant directement le phénomène des aurores boréales.

Nous obtenons des résultats particulièrement intéressants en examinant la manière dont les aurores boréales se répartissent entre les différentes hauteurs. Pour étudier ce phénomène, nous avons divisé la hauteur en intervalles de 2^{km} et compté les aurores boréales dont la limite inférieure se trouve comprise dans chacun d'eux.

Le résultat de ce compte est représenté dans la figure ci-contre qui donne la distribution des hauteurs pour les arcs diffus (I), les arcs en draperies (III) et les draperies (II), et enfin la distribution du nombre total (IV).

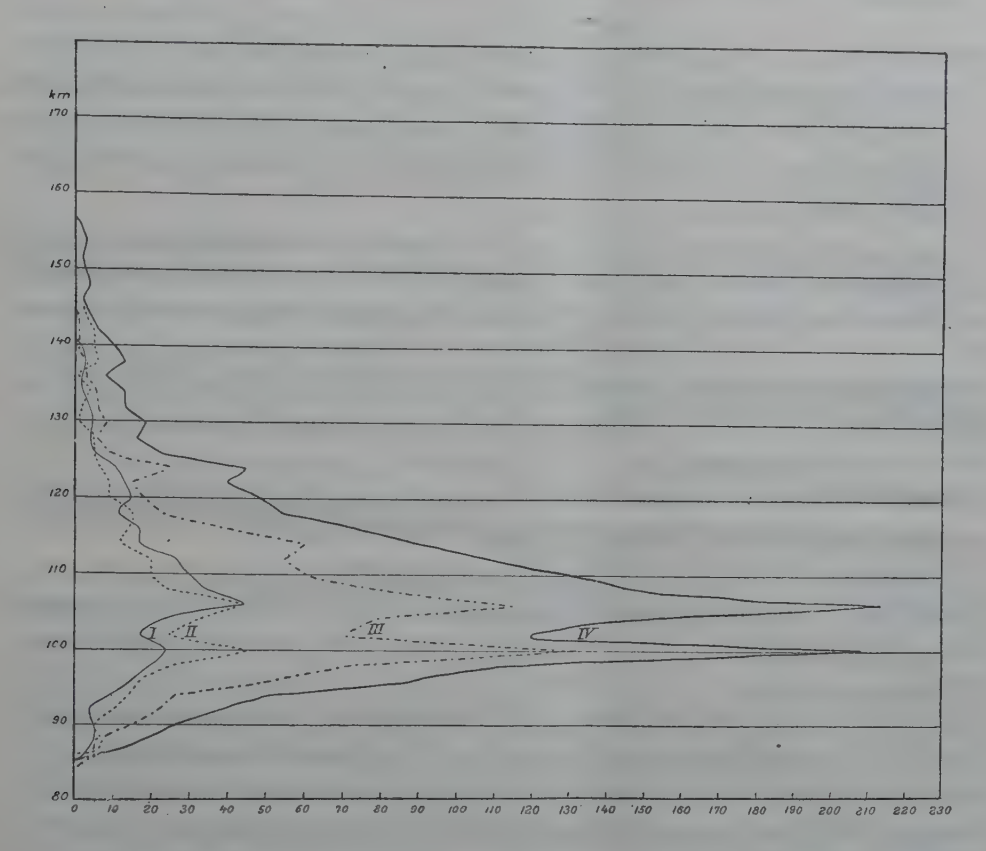
Nous voyons que l'on n'a jamais trouvé de limite inférieure à 85^{km}, et ces valeurs les plus basses sont toujours un peu douteuses. Le plus grand nombre a sa limite inférieure à une hauteur de 100^{km} à 110^{km}.

Nous remarquons immédiatement que toutes les courbes indiquent deux maxima bien définis, l'un vers 100^{km} et l'autre vers 106^{km}. Il en existe peut-être d'autres, mais les aurores boréales qui y correspondent se produisent si rarement que leurs maxima seront facilement masquées par les aurores appartenant aux deux maxima principaux.

Les deux mêmes maxima sont indiqués dans les courbes trouvées par M. Störmer, qui se base sur les résultats obtenus par lui au printemps de 1913. Mais chez lui, ces maxima ne prennent pas une place spécialement dominante (¹). Or nous sommes d'avis que nous avons réussi, en déter-

(¹) Suivant une conférence faite à la Réunion des naturalistes, en juillet 1916, à Christiania.

minant la limite inférieure avec des soins tout à fait particuliers, à apporter une preuve irréfutable de l'existence de ces deux maxima. Si nous considérons séparément les observations relatives à chacune des deux courbes de base, nous trouvons, pour elles deux, les deux mêmes maxima avec



exactement la même disposition et pour toutes les trois formes. (Voir la figure).

La constatation de ces maxima est un résultat de la plus haute importance pour le problème des aurores boréales. *La conséquence immédiate en est que nous devons supposer que la masse principale des rayons cosmiques qui produisent les aurores boréales consistent en deux groupes ayant chacun des puissances de pénétration bien distinctes. Nous pouvons en conclure en outre que les trois formes les plus fréquentes : arcs diffus, arcs en draperies et draperies, sont essentiellement de même nature et doivent être produits par des rayons de même espèce.* Par suite du peu de différence dans la hauteur moyenne, il y a lieu de supposer que toutes les formes d'aurores boréales

observées par nous sont dues à des rayons essentiellement de même espèce, et que la différence des types d'aurores boréales est plutôt une différence de forme qu'une différence de nature physique.

PHYSIOLOGIE. — *Classification des muscles du membre supérieur de l'homme suivant leur systématisation radiculaire, par le rapport des quantités donnant le seuil avec les deux ondes isolées du courant induit (indice de vitesse d'excitabilité).* Note de MM. **G. Bourguignon** et **J. Lucas**, présentée par M. A. Dastre.

Nous avons appliqué, à l'examen de nos blessés, le procédé de mesure de la vitesse d'excitabilité par la recherche du rapport des quantités induites donnant le seuil avec l'onde de fermeture et l'onde d'ouverture du chariot d'induction, qu'avaient proposé Marcelle Lapicque et Jeanne Weill ([1]), en physiologie animale, et que l'un de nous a étudié sur l'homme en collaboration avec H. Laugier ([2]).

Nous désignons ce rapport sous le nom d'*indice de vitesse d'excitabilité*, ou, plus simplement, d'*indice de vitesse*, comme H. Laugier.

Nous avons été rapidement frappés du fait que l'indice normal est, assez régulièrement, le plus grand sur le biceps, le deltoïde et le long supinateur, alors qu'il est le plus petit dans le domaine radial (moins le long supinateur).

Lorsque l'un de nous eut montré la classification des muscles du membre supérieur, par la chronaxie, suivant leur systématisation radiculaire ([3]), nous avons pensé à la vérifier par l'indice de vitesse, en raison des différences d'indices que nous avions remarquées, et nous avons procédé à trois séries de recherches :

([1]) Marcelle Lapicque et Jeanne Weill, *Société de Biologie*, 27 février 1909.

([2]) G. Bourguignon et H. Laugier, *Société d'Électrothérapie*, mai 1911 et avril 1912; *Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences*, Dijon, août 1911; *Société de Biologie*, 2 et 9 mars 1912; *Société de Neurologie*, janvier 1912 et 25 avril 1912. — G. Bourguignon, *La notion de vitesse d'excitabilité en physiologie et pathologie nerveuses* (*Société française d'Électrothérapie*, décembre 1912). — H. Laugier, *Vitesse d'excitabilité et courants induits* (Thèse de la Faculté de Médecine, 1913).

([3]) G. Bourguignon, *Comptes rendus*, t. 163, 1916, p. 68; *Société de Biologie*, 1er juillet 1916.

1° Nous avons relevé toutes les valeurs de l'indice de vitesse obtenues sur les muscles normaux depuis le début de décembre 1915 jusqu'à la fin de juillet 1916. Ayant successivement employé trois bobines induites différentes, nous avons établi trois séries d'indices normaux correspondant respectivement à chacune des trois instrumentations.

Dans chacune des séries nous avons relevé, pour chaque muscle, l'indice le plus grand, l'indice le plus petit (1) et la moyenne arithmétique entre tous les indices obtenus sur le muscle considéré.

Que la comparaison des différents muscles entre eux porte sur l'indice maximum, l'indice minimum, ou l'indice moyen, *l'indice de vitesse d'excitabilité classe toujours les muscles du membre supérieur suivant leur systématisation radiculaire*. C'est ce que met en évidence le Tableau suivant qui se rapporte à l'une de nos trois séries d'expériences.

Il montre pour les trois groupes radiculaires (5e et 6e paires cervicales — 8e cervicale et 1re dorsale — et enfin 7e cervicale) des valeurs d'indice ou de chronaxie égales pour chaque groupe, qu'il s'agisse d'indice maximum ou minimum ou moyen, et qui vont en décroissant du premier groupe au troisième.

Fermeture : bobine de 3300 ohms.

Ouverture : bobine de 1613 ohms (addition de 1687 ohms sans self).

Racines.	Muscles et nerfs.	Nombre d'expér.	Indice maximum.	Indice minimum.	Indice moyen.	Chronaxie (2) (val. moy.). s
C. V et C. VI.	Biceps	39	22,5	13,2	15,8	0,00012
	Long supinateur	19	22,4	13,3	15,8	0,00012
C. VIII, et D. I	Em. hypothénar	17	18,2	13,3	15,4	0,0003
	Em. thénar	23	18,7	12	14,6	
C. VII.	Extenseur commun.	10	14	10	11,7	0,0006

(1) Nous avons eu des écarts environ trois fois plus grands (30 pour 100 environ) que ceux qu'avaient observés G. Bourguignon et H. Laugier (10 pour 100) pour un muscle donné avec une instrumentation donnée. Les raisons de cette différence sont : 1° les variations de résistance intérieure de nos accumulateurs dont l'état de charge est moins constant qu'à la Salpêtrière parce qu'ils sont de capacité plus petite (20 ampères-heures au lieu de 80 ampères-heures); 2° les variations légères, en plus ou en moins, de la vitesse d'excitabilité des nerfs et muscles sains chez les sujets porteurs de blessures d'un nerf du même membre ou du membre symétrique, sur lesquelles l'un de nous vient d'attirer l'attention (G. Bourguignon, *Société de Biologie*, 1er juillet 1916). Or nous avons utilisé les chiffres pris par comparaison sur les muscles sains chez les blessés, tandis que G. Bourguignon et H. Laugier n'avaient utilisé pour leurs recherches que des sujets entièrement normaux.

(2) G. Bourguignon, *loc. cit.*

2° Nous avons recherché, dans les publications antérieures de l'un de nous et H. Laugier, les valeurs de l'indice pour les muscles étudiés. Le nombre de ces muscles est moins grand, mais leur classification est la même. En voici le relevé :

	Muscles.	Bobine de 1651 ohms (1).	Bobine à 3390 ohms. Limites (2).	Val. moy. (3)
C. V.	Biceps	14,5-16	12-13	12,3
C. VII.	Extenseur commun des doigts	13-14	10-10,3	10,2
C. VI.	Deltoïde	14-16	11-12	11,4

3° Enfin, nous avons comparé systématiquement le même jour, sur un même sujet, l'indice de vitesse dans les trois domaines radiculaires du membre supérieur. Nous avons retrouvé la même classification. Exemple :

Fermeture : bobine de 3300 ohms. C. V et C. VI.		C. VII.		Ouverture : bobine de 1613 ohms (addition de 1687 ohms sans self). C. VIII et D. I.	
Biceps	14,3	Ext. commun	10,4	Grand palmaire	13,4
Long supinateur	16,5	»	»	Cub. antérieur	12,3

Conclusions. — L'indice de vitesse d'excitabilité déterminé avec les courants induits classe les muscles du membre supérieur de la même façon que la chronaxie, en trois groupes : les muscles les plus rapides (caractérisés par les indices les plus grands et les chronaxies les plus petites) sont innervés par C. V et C. VI; ceux de rapidité moyenne sont innervés par C. VIII et D. I et les moins rapides (caractérisés par les indices les plus petits et les chronaxies les plus grandes) sont innervés par C. VII.

La classification donnée par l'un de nous, à l'aide de la chronaxie, se retrouve donc dans les mesures de vitesse d'excitabilité faites, avec les courants induits, antérieurement à la connaissance de cette classification.

(1) G. Bourguignon et H. Laugier, *Société d'Électrothérapie*, mai 1911.
(2) G. Bourguignon et H. Laugier, *Société de Neurologie* (2e Note), 25 avril 1912.
(3) H. Laugier, *Thèse de la Faculté de Médecine*, p. 111.

MICROBIOLOGIE. — *Contribution à l'étiologie de la gangrène gazeuse.* Note (¹) de MM. **Weinberg** et **P. Séguin**, présentée par M. Laveran.

Nous avons établi, dans deux Notes antérieures (²), que la gangrène gazeuse est causée soit par un, soit par une association de certains microbes anaérobies. Ces derniers, qu'on trouve quelquefois dans les plaies de guerre sans gravité, ne deviennent dangereux que lorsqu'ils trouvent dans le membre atteint par le projectile des conditions favorables à leur développement.

Parmi les facteurs étiologiques les plus importants de la gangrène gazeuse, il faut citer en premier lieu les altérations graves des os, des vaisseaux et des muscles, ainsi que la persistance, dans les tissus profonds, de corps étrangers (éclats d'obus, débris vestimentaires, esquilles) non extraits à temps par le chirurgien.

L'étude de la flore des plaies de guerre nous a permis d'y découvrir un microbe que, pour des raisons qu'on trouvera plus bas, nous désignons sous le nom de *B. histolytique* (*B. histolyticus*). Ce microbe, incapable de causer par lui-même une infection gazeuse, paraît jouer un rôle important dans l'étiologie de certains cas de gangrène gazeuse en provoquant des lésions profondes des vaisseaux et du tissu musculaire.

Voici sa courte description :

Diplobacille : longueur, 3^{μ} à 5^{μ}; épaisseur, $0^{\mu},5$ à $0^{\mu},7$; très mobile dans les sérosités et dans les cultures jeunes des premiers repiquages; grosses endospores subterminales, très facilement colorables par le Ziehl; bacille richement cilié. Anaérobie strict; quelques races très difficiles à cultiver.

Ce microbe se développe aussi bien en bouillon sucré qu'en bouillon non sucré. Il trouble abondamment le bouillon et dépose lentement. L'odeur des cultures vieilles de quelques jours est légèrement nauséeuse. Il digère lentement le blanc d'œuf et liquéfie rapidement la gélatine. Le lait est coagulé en 24 à 48 heures et le caillot digéré complètement en 8 à 15 jours d'étuve.

Les colonies en gélose profonde glucosée sont arborescentes. Il n'y a pas production de gaz dans la gélose.

En dehors des lésions caractéristiques que produit ce microbe chez l'animal, sa spécificité est démontrée par l'action du sérum anti *B. histolyticus* que nous préparons actuellement sur cheval.

Le *B. histolyticus* est pathogène pour le cobaye, la souris, le lapin et plus faiblement pour le rat.

(¹) Séance du 16 octobre 1916.

(²) Voir ces *Comptes rendus*, t. **160**, 1915, p. 325, et t. **161**, 1915, p. 744.

Lorsqu'on injecte dans la cuisse d'un cobaye $0^{cm^3},25$ à 1^{cm^3} de culture de 24 heures en bouillon glucosé, on constate dès le lendemain une destruction locale considérable des tissus.

La peau est ouverte; une bouillie hémorragique s'échappe de la lésion et l'on aperçoit le squelette du membre complètement dénudé. Souvent l'articulation du genou est attaquée; les ligaments, la capsule, le revêtement cartilagineux de l'articulation sont détruits, et le tibia se détache spontanément du fémur (auto-amputation inflammatoire). La lésion n'est pas putride, il n'y a pas formation de gaz. Le cobaye peut survivre 12 à 24 heures à cette horrible mutilation.

Si l'on suit de plus près l'évolution des lésions, on constate que le microbe attaque d'abord le tissu conjonctivo-vasculaire et détache les muscles du derme. L'espace rendu libre par cette digestion est occupé par de gros caillots sanguins rouge-framboise. Les aponévroses et le tissu conjonctif intermusculaire sont à leur tour détruits. Les faisceaux, puis les fibres musculaires sont dissociés et liquéfiés. Lorsque les altérations du derme sont assez avancées, l'épiderme aminci, rouge violacé, craque sur une certaine longueur; il se produit ainsi une fente linéaire, régulière comme une incision pratiquée au bistouri; celle-ci s'agrandit rapidement à mesure que la peau nécrosée se détache et tombe; un flot de bouillie hémorragique s'échappe de la lésion ouverte.

Souvent la digestion des tissus s'étend au voisinage de la cuisse. La peau de l'abdomen est décollée. Les muscles de la paroi abdominale sont détruits et la séreuse péritonéale recouvre seule la masse de l'iutestin; celui-ci force alors cette mince barrière et fait hernie dans la lésion.

Le cobaye succombe tantôt à une infection secondaire, tantôt à une intoxication directe.

Les cultures jeunes en bouillon glucosé, filtrées sur Chamberland, sont toxiques pour le cobaye et le lapin; 1^{cm^3} à 2^{cm^3} de toxine injectée dans la veine de ces animaux déterminent leur mort en quelques minutes. L'animal est progressivement paralysé et meurt par arrêt respiratoire. L'injection sous-cutanée ou intermusculaire de toxine filtrée ($2^{cm^3},5$) provoque une grave lésion locale hémorragique avec destruction du tissu conjonctif et de la peau; les muscles sont respectés.

On comprend facilement qu'un microbe capable d'altérer à ce point les tissus ne puisse que favoriser le développement des anaérobies de la gangrène gazeuse dans les plaies infectées.

Nous avons pu démontrer expérimentalement sur le cobaye le rôle favo-

risant du *B. histolyticus* vis-à-vis des microbes et de la gangrène gazeuse, et plus spécialement du *B. perfringens* et du *B. œdematiens*.

Si l'on injecte à l'animal une dose infime (isolément non pathogène) de culture de bacille histolytique, mélangée à une dose infime (non pathogène à elle seule) d'une culture d'un de ces deux microbes, l'association ainsi réalisée se montre très virulente pour le cobaye, qui meurt rapidement en présentant des lésions mixtes, caractéristiques.

Prenons un exemple : six cobayes sont inoculés dans la cuisse avec des mélanges différemment dosés de cultures en bouillon de *B. perfringens* et de *B. histolyticus*.

Deux cobayes ont reçu chacun $\frac{1}{4}$ de centimètre cube de culture de *B. histolyticus* et $\frac{1}{10}$ de centimètre cube de culture de *B. perfringens*.

Deux autres cobayes, chacun $\frac{1}{10}$ de centimètre cube de culture de *B. histolyticus* et $\frac{1}{10}$ de centimètre cube de culture de *B. perfringens*.

Enfin les deux derniers cobayes $\frac{1}{20}$ de centimètre cube de *B. histolyticus*, $\frac{1}{20}$ de centimètre cube de *B. perfringens*.

Alors que chez des animaux témoins la culture de *B. histolyticus* et celle de *B. perfringens* n'ont été pathogènes qu'à la dose limite de $\frac{1}{4}$ de centimètre cube (mort en 48 heures), tous les cobayes injectés avec le mélange des deux microbes sont morts très rapidement, en présentant de grosses lésions à caractère mixte (un cobaye en 21 heures, quatre en 24 heures, un en 30 heures).

Deux autres arguments plaident encore en faveur du rôle important joué par ce microbe dans l'étiologie de la gangrène gazeuse :

1° Depuis que nous avons appris à connaître les caractères du *B. histolyticus*, nous l'avons fréquemment rencontré (8 fois sur 30 cas dernièrement étudiés); ce pourcentage est vraisemblablement inférieur à la réalité, car dans quelques-uns de ces cas nous n'avons pu ensemencer que le sang du cœur prélevé après la mort du blessé;

2° Sur neuf échantillons de *B. histolyticus* que nous possédons, quatre ont été isolés dans des cas de gangrène gazeuse mortelle; dans quatre autres cas, l'amputation a dû être pratiquée.

Les faits que nous venons d'exposer montrent l'importance qu'il y aurait à combattre le *B. histolyticus* dans les plaies de guerre. C'est ce que nous essayons actuellement de faire en préparant contre ce microbe un sérum actif.

A 15 heures trois quarts, l'Académie se forme en Comité secret.

La séance est levée à 16 heures.

G. D.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Ouvrages reçus dans les séances de juillet 1916 (*suite*).

Le climat de la France. Température, pression, vent, par G. Bigourdan. Paris, Gauthier-Villars, 1916; 1 vol. in-8°. (Présenté par l'auteur.)

L'Année biologique. Comptes rendus annuels des travaux de Biologie générale, publiés sous la direction de Yves Delage, 19e année, 1914. Paris, Lhomme, 1916; 1 vol. in-8°. (Présenté par M. Delage.)

Principes de Plasmogénie, par Albert et Alexandre Mary. Mexico, Departamento de l'Imprenta de la Secretaria de Fomento, 1916; 1 vol. in-8°.

Recueil des travaux du Conseil départemental d'hygiène de la Gironde, année 1915, publié par les soins de M. le Dr L. Barthe, t. IX. Bordeaux, Ragot, 1916; 1 vol. in-12.

Du choix d'un anesthésique et d'un analgésique général en chirurgie et en obstétrique (*le chloroforme chloréthylé*), par Jules Regnault. Extrait du *Progrès médical*, n° 8, 5 avril 1915. Paris, *Progrès médical*, 1916; 1 fasc. in-12.

Résumé météorologique de l'année 1914 *pour Genève et le Grand Saint-Bernard*, par Raoul Gautier. Tiré des *Archives des sciences de la bibliothèque universelle*, août et septembre 1915. Genève, Société générale d'imprimerie, 1915; 1 fasc. in-8°.

Observations météorologiques faites aux fortifications de Saint-Maurice pendant l'année 1914, résumé par Raoul Gautier et Ernest Rod. Extrait des *Archives des sciences physiques et naturelles,* novembre 1914, mars, avril, juin et décembre 1915. Genève, Société générale d'imprimerie, 1915; 1 fasc. in-8°.

Rapport sur le concours de réglage des chronomètres de l'année 1915, présenté à la Classe d'Industrie et de Commerce de la Société des Arts de Genève, le 21 février 1916, par Raoul Gautier.

(*A suivre.*)